Άσκηση 1η

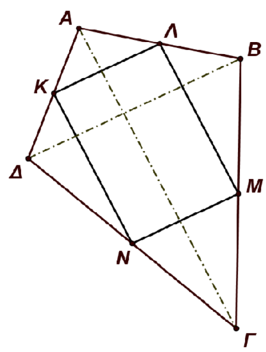
Να δείξετε ότι τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου ορίζουν παραλληλόγραμμο. Με ποιες επι πλέον προϋποθέσεις το παραλληλόγραμμο αυτό είναι:

- ***Ορθογώνιο***
- ***Ρόμβος και***
- ***Τετράγωνο;***

Απόδειξη:

Στο τρίγωνο $\triangle AB\Delta$ ***τα σημεία*** K ***και*** Λ ***είναι μέσα των πλευρών του*** $A\Delta$ ***και*** AB ***αντίστοιχα. Επομένως είναι:***

$$K\Lambda \parallel \Delta B \quad \kappa\alpha\iota \quad K\Lambda = \frac{\Delta B}{2} \qquad (1).$$



Αρχείο: AL-Paralihlogramma1.ggb

Όμοια, στο τρίγωνο $\triangle \Gamma B\Delta$ ***τα σημεία*** M ***και*** N ***είναι μέσα των πλευρών του*** $B\Gamma$ ***και*** $\Gamma\Delta$ ***αντίστοιχα. Άρα :***

$$MN \parallel \Delta B \quad \kappa\alpha\iota \quad MN = \frac{\Delta B}{2} \qquad (2).$$

Από τις (1) ***και*** $(2) \Rightarrow K\Lambda =\!\!\parallel MN$. ***Επομένως το τετράπλευρο*** $K\Lambda MN$ ***είναι παραλληλόγραμμο.***

Από τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ ***και*** $\triangle \Delta A\Gamma$ ***και με αντίστοιχους συλλογισμούς διαπιστώνουμε ότι:***

$$ΛΜ \parallel ΑΓ, \quad ΚΝ \parallel ΑΓ \quad και \quad ΛΜ = ΚΝ = \frac{ΑΓ}{2} \qquad (3).$$

Το $ΚΛΜΝ$ είναι:

- Ορθογώνιο όταν $ΑΓ \perp ΒΔ$
- Ρόμβος όταν $ΑΓ = ΒΔ$ και
- Τετράγωνο όταν $ΑΓ \perp ΒΔ, \quad ΑΓ = ΒΔ.$

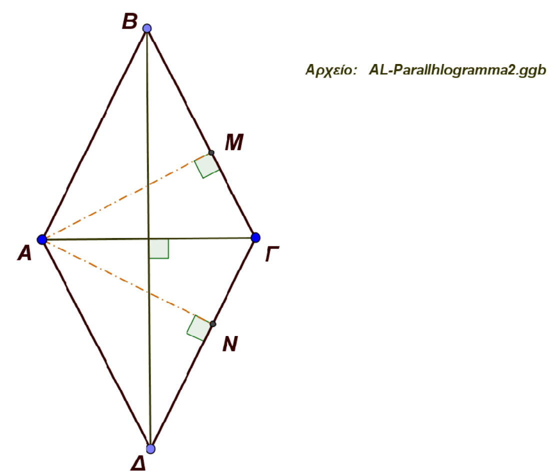
Να δικαιολογήσετε τα παραπάνω.

<u>Άσκηση 2η</u>

Να δείξετε ότι οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών ρόμβου είναι ίσες.

Απόδειξη:

Έστω $ΑΜ$ και $ΑΝ$ οι αποστάσεις των $ΑΔ, \ ΒΓ$ και $ΑΒ, \ ΓΔ$ αντίστοιχα.



Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle ΑΜΒ$ και $\triangle ΑΔΝ$ έχουν:

$$\left\{ΑΒ = ΑΔ \quad και \quad Α\widehat{Β}Μ = Α\widehat{Δ}Ν\right\} \Rightarrow \triangle ΑΜΒ = \triangle ΑΔΝ \Rightarrow ΑΜ = ΑΝ.$$

Να διατυπώσετε την αντίστροφη της παραπάνω πρότασης και να ελέγξετε κατά πόσον είναι αληθής.

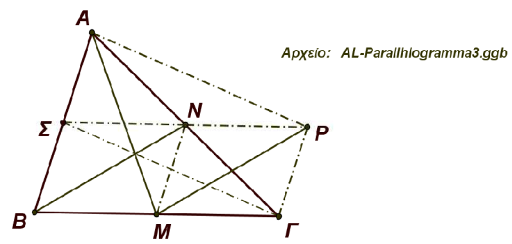
Άσκηση 3η

Δίδεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και οι διάμεσοι του $AM = \mu_\alpha$ και $BN = \mu_\beta$. Κατασκευάζουμε το ευθύγραμμο τμήμα $MP =\!\!/\!\!/ BN$. Να δείξετε ότι: $AP = \mu_\gamma$.

Απόδειξη:

Εφόσον $MP =\!\!/\!\!/ BN$ το σχήμα $BMPN$ είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως:

$$NP /\!\!/ BM,\ \ NP = BM = M\Gamma \Rightarrow NP =\!\!/\!\!/ M\Gamma \quad (1).$$



Η ευθεία PN διέρχεται από το μέσον της $A\Gamma$ και είναι: $PN /\!\!/ B\Gamma$. Επομένως η PN τέμνει την AB στο μέσον της Σ.

Λόγω της (1) το σχήμα $NP\Gamma M$ είναι παραλληλόγραμμο. Άρα:

$$\Gamma P =\!\!/\!\!/ MN = \frac{AB}{2} = A\Sigma \Rightarrow \Gamma P =\!\!/\!\!/ A\Sigma \quad (2).$$

Συνεπώς το σχήμα $AP\Gamma\Sigma$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε $AP = \Gamma\Sigma = \mu_\gamma$.

Άσκηση 4η

Δίδεται παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία $Ρ$ και $Σ$ των πλευρών του $ΑΒ$ και $ΓΔ$ αντίστοιχα, έτσι ώστε να είναι: $3ΑΡ = ΑΒ$ και $3ΓΣ = ΓΔ$.

Να δείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΓ$, $ΒΔ$ και $ΡΣ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

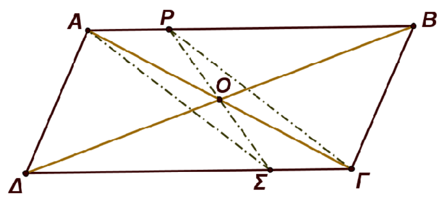
Απόδειξη:

Το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι παραλληλόγραμμο και επομένως οι διαγώνιες του $ΑΓ$ και $ΒΔ$ διχοτομούνται[1]. Δηλαδή το σημείο $Ο$ είναι μέσον των τμημάτων $ΑΓ$ και $ΒΔ$.

Είναι επίσης:

$$3ΑΡ = ΑΒ, \quad 3ΓΣ = ΓΔ \quad \text{και} \quad ΑΒ =\!\!/\!/ \, ΓΔ \Rightarrow ΑΡ =\!\!/\!/ \, ΓΣ.$$

Αρχείο: AL-Parallhlogramma4.ggb



Επομένως και το τετράπλευρο $ΑΡΓΣ$ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε οι διαγώνιες του $ΑΓ$ και $ΡΣ$ διχοτομούνται. Τελικά τα ευθύγραμμα τμήματα $ΑΓ$, $ΒΔ$ και $ΡΣ$ διχοτομούνται και συνεπώς διέρχονται από το κοινό τους μέσον $Ο$.

[1] *Ή έχουν το ίδιο μέσον ή η καθεμία διέρχεται από το μέσον της άλλης.*

Άσκηση 5η

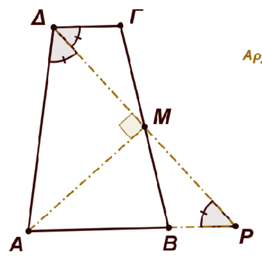
Σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ είναι $ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ$.

Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{A}$ και $\hat{Δ}$ τέμνονται κάθετα επί της $ΒΓ$.

Απόδειξη:

Έστω ότι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Δ}$ του $ΑΒΓΔ$ τέμνει[2] τις $ΒΓ$ και $ΑΒ$ στα σημεία $Μ$ και $Ρ$ αντίστοιχα. Είναι τότε:

$$Γ\hat{Δ}Μ = Ρ\hat{Δ}Α \quad και \quad Γ\hat{Δ}Μ = Δ\hat{Ρ}Α \Rightarrow Ρ\hat{Δ}Α = Δ\hat{Ρ}Α \Rightarrow ΑΔ = ΑΡ \Rightarrow$$



Αρχείο: AL-Parallhlogramma5.ggb

$$ΑΒ + ΓΔ = ΑΒ + ΒΡ \Rightarrow ΓΔ = ΒΡ \qquad (1).$$

Τα τρίγωνα $\triangle ΜΒΡ$ και $ΜΓΔ$ έχουν:

$$\{ΒΡ = ΓΔ,\ Μ\hat{Β}Ρ = Μ\hat{Γ}Δ \quad και \quad Μ\hat{Ρ}Β = Μ\hat{Δ}Γ\} \Rightarrow \triangle ΜΒΡ = \triangle ΜΓΔ \Rightarrow ΜΡ = ΜΔ \qquad (2).$$

[2] Για να δείξουμε ότι οι ευθείες $(ε_1)$ και $(ε_2)$ τέμνονται <u>ε π ί</u> της ευθείας $(ε)$ κατασκευάζουμε την τομή $(ε) \cap (ε_1) = \{Μ\}$ και αποδεικνύουμε ότι η $(ε_2)$ διέρχεται από το σημείο $Μ$.

Στο ισοσκελές τρίγωνο $\triangle ΔΑΡ$, $(ΑΔ = ΑΡ)$ η $ΑΜ$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση του $ΔΡ$. Επομένως θα είναι ταυτόχρονα διχοτόμος και ύψος του.

Άρα οι διχοτόμοι των γωνιών $\widehat{Α}$ και $\widehat{Δ}$ του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ τέμνονται κάθετα επί της $ΒΓ$.

Άσκηση: 6η

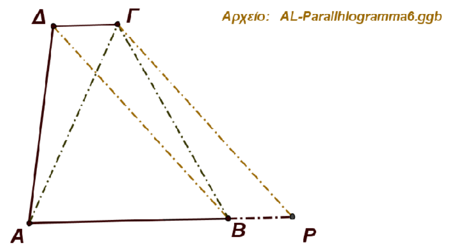
Σε τραπέζιο $ΑΒΓΔ$ με $ΑΒ \parallel ΓΔ$ είναι $ΒΔ > ΑΓ$.

Να δείξετε ότι: $ΒΔ - ΑΓ < ΑΒ + ΓΔ < ΒΔ + ΑΓ$.

Απόδειξη:

Από την κορυφή $Γ$ του τραπεζίου $ΑΒΓΔ$ φέρνουμε[3] την $Γx \parallel ΔΒ$ που τέμνει την $ΑΒ$ στο σημείο της $Ρ$. Τότε το τετράπλευρο $ΔΓΡΒ$ είναι παραλληλόγραμμο (γιατί;) οπότε:

$$ΓΡ = ΔΒ > ΑΓ, \quad ΒΡ = ΔΓ \quad \text{και} \quad ΑΡ = ΑΒ + ΓΔ \qquad (1).$$



Εφαρμόζουμε την τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο $\triangle ΑΓΡ$ και έχουμε:

$$ΓΡ - ΑΓ < ΑΡ < ΓΡ + ΑΓ \overset{(1)}{\Rightarrow} ΔΒ - ΑΓ < ΑΒ + ΓΔ < ΒΔ + ΑΓ.$$

[3] Με την παράλληλη αυτή δημιουργήσαμε τρίγωνο δύο πλευρές του οποίου είναι οι διαγώνιες του τραπεζίου.

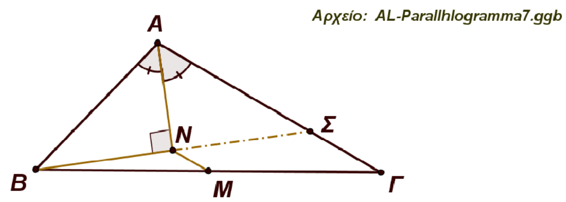
Άσκηση: 7η

Δίδεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $A\Gamma > AB$. Η κάθετη από το B στην διχοτόμο της $\widehat{A}$ την τέμνει στο σημείο της N. Αντίστοιχα, η κάθετη από το Γ στην εξωτερική διχοτόμο της $\widehat{A}$ την τέμνει στο σημείο της Σ. Αν M είναι το μέσον της $B\Gamma$ να δείξετε ότι:

$$MN \parallel A\Gamma,\ \ MN = \frac{A\Gamma - AB}{2} \quad \text{και} \quad M\Sigma \parallel AB,\ \ M\Sigma = \frac{A\Gamma + AB}{2}.$$

Απόδειξη:

Όταν από σημείο πλευράς γωνίας φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο της εξυπηρετεί πολλές φορές να προεκτείνουμε την κάθετη αυτή έως ότου συναντήσει και την άλλη της πλευρά. Και αυτό γιατί δημιουργείται ένα ισοσκελές τρίγωνο.



Με αυτήν την λογική προεκτείνουμε την BN έως ότου συναντήσει την $A\Gamma$ στο σημείο της Σ. Τότε το τρίγωνο $\triangle AB\Sigma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Sigma$ και επειδή $\Sigma\Gamma = A\Gamma - A\Sigma$ θα είναι και:

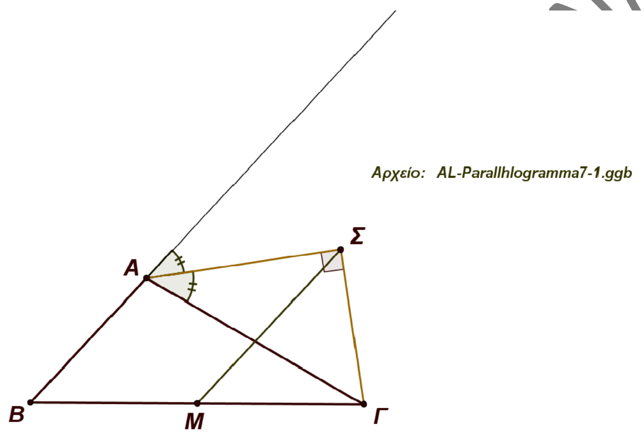
$$\Sigma\Gamma = A\Gamma - AB \qquad (1).$$

Η διχοτόμος AN του ισοσκελούς τριγώνου $\triangle AB\Sigma$ είναι ταυτόχρονα και διάμεσος του, δηλαδή το σημείο N είναι μέσον της $B\Sigma$. Έτσι, στο τρίγωνο $\triangle B\Gamma\Sigma$ είναι:

$$\{M \ \ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\nu \ \ B\Gamma, \quad N \ \ \mu\acute{\varepsilon}\sigma o\nu \ \ B\Sigma\} \Rightarrow MN /\!/ \Sigma\Gamma, \quad MN = \frac{\Sigma\Gamma}{2} \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow MN /\!/ A\Gamma, \quad MN = \frac{A\Gamma - AB}{2}.$$

Με αντίστοιχους συλλογισμούς να λύσετε το 2ο ερώτημα, το σχήμα του οποίου φαίνεται παρακάτω:



Άσκηση: 8η

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 2\Gamma\Delta$. Κατασκευάζουμε το συμμετρικό Σ του σημείου A ως προς το σημείο Δ. Ονομάζουμε P το σημείο τομής των $\Delta\Gamma$ και ΣB.

- ***Δείξτε ότι $A\widehat{P}\Sigma = 90°$ και ότι η $B\Sigma$ είναι διχοτόμος της γωνίας $A\widehat{B}\Gamma$.***
- ***Αν η κάθετη στην $B\Sigma$ στο σημείο της B τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο σημείο της M, να δείξετε ότι: $\Gamma M = A\Delta$.***

Άσκηση: 9η

Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ είναι $AB = 2\Gamma\Delta$. Να δείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών του $\widehat{A}$ και $\widehat{B}$ τέμνονται επί της $\Delta\Gamma$ και σχηματίζουν ορθή γωνία.

Άσκηση: 10η

Σε τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ είναι $\Gamma\Delta = 3AB$. Έστω $P\Sigma$ η διάμεσος του $AB\Gamma\Delta$ που τέμνει τις ΔB και $A\Gamma$ στα σημεία M και N αντίστοιχα. Να δείξετε ότι:

- $MN = AB$
- ***Αν η AM τέμνει την $\Delta\Gamma$ στο σημείο της K, τότε τα σχήματα $ABK\Delta$ και $MNK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμα.***