Μαθηματικά Α΄ Λυκείου - Λογισμός στο IR.

Η διάταξη στο σύνολο IR των πραγματικών αριθμών.

Κάθε πραγματικός αριθμός είναι ή μόνον θετικός ή μόνον αρνητικός ή μόνον ο μηδέν. Γι' αυτό λέμε ότι το σύνολο IR των πραγματικών αριθμών αποτελείται από τα σύνολα:

- Των θετικών πραγματικών αριθμών που το συμβολίζουμε με IR^+
- Των αρνητικών πραγματικών αριθμών που το συμβολίζουμε με IR^- και
- Το μονοσύνολο $\{0\}$.

Ο ορισμός του συνόλου IR ως η ένωση των τριών παραπάνω υποσυνόλων του έχει σαν συνέπεια να εμφανιστεί μεταξύ των πραγματικών αριθμών μια νέα σχέση: Η σχέση της ανισότητας ή της διάταξης.

Ορισμοί:

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x και ψ.

- Θα λέμε ότι ο αριθμός x είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό ψ, και θα γράφουμε τότε συμβολικά $x > \psi$, αν και μόνον αν η διαφορά $x - \psi$ είναι θετικός αριθμός.

  Δηλαδή: $x > \psi \Leftrightarrow x - \psi > 0$.

- Θα λέμε ότι ο αριθμός x είναι μικρότερος από τον αριθμό ψ, και θα γράφουμε τότε συμβολικά $x < \psi$, αν και μόνον αν η διαφορά $x - \psi$ είναι αρνητικός αριθμός.

  Δηλαδή: $x < \psi \Leftrightarrow x - \psi < 0$.

  Είναι φανερό ότι αν $x > \psi \Leftrightarrow x - \psi > 0 \Leftrightarrow -(x - \psi) < 0 \Leftrightarrow \psi - x < 0 \Leftrightarrow \psi < x$.

  Δηλαδή οι σχέσεις $x > \psi$ και $\psi < x$ είναι ισοδύναμες $(x > \psi \Leftrightarrow \psi < x)$.

- ***Θα λέμε ότι ο αριθμός x είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό ψ, και θα γράφουμε τότε συμβολικά $x \geq \psi$, αν και μόνον αν η διαφορά $x - \psi$ είναι θετικός αριθμός ή ο μηδέν.***

  Δηλαδή: $\boldsymbol{x \geq \psi \Leftrightarrow x - \psi \geq 0}$.

  Αντίστοιχα, είναι: $\boldsymbol{x \leq \psi \Leftrightarrow x - \psi \leq 0}$.

Συνέπειες από τους παραπάνω ορισμούς:

- ***Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του μηδενός, δηλαδή:*** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}^{+} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} > 0$.
- ***Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος του μηδενός, δηλαδή:*** $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{IR}^{-} \Leftrightarrow \boldsymbol{x} < 0$.
- ***Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από οποιονδήποτε αρνητικό, δηλαδή αν:***

$$\boldsymbol{x} > 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \psi < 0 \Rightarrow \boldsymbol{x} > \psi.$$

- ***Μεταξύ δύο αρνητικών αριθμών μεγαλύτερος είναι εκείνος με μικρότερη απόλυτη τιμή.***

Προτάσεις επί των ανισοτήτων.

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \boldsymbol{\beta}, x$ ***και*** $\boldsymbol{\psi}$.

$\boldsymbol{\Pi_1}$: ***Αν στα μέλη ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:***

$$\boldsymbol{A\nu} \quad \boldsymbol{\alpha} > \beta \Leftrightarrow \alpha \pm x > \beta \pm x, \quad \boldsymbol{\varepsilon\nu\acute{\omega}} \quad \boldsymbol{\alpha\nu} \quad \boldsymbol{\alpha} < \beta \Leftrightarrow \alpha \pm x < \beta \pm x.$$

Θα αποδείξουμε για παράδειγμα ότι αν: $\boldsymbol{\alpha} > \beta \Leftrightarrow \alpha + \boldsymbol{x} > \beta + \boldsymbol{x}$.

Πράγματι: Αν $\boldsymbol{\alpha} > \beta \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} > 0$ $\kappa\alpha\iota$:

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{\beta} > 0 \Leftrightarrow \alpha + \boldsymbol{x} > \beta + x.$$

Π_2: **Αν οι πραγματικοί αριθμοί α και β είναι ομόσημοι και $\alpha<\beta$ τότε θα είναι και:**

$$\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}.$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε την διαφορά:

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta} \qquad (1).$$

Είναι όμως:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha<\beta\\ \text{και}\\ \alpha,\ \beta\ \text{ομόσημοι}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\beta-\alpha>0\\ \text{και}\\ \alpha\beta>0\end{matrix}\right\} \qquad (2).$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}>0\Leftrightarrow\frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}.$$

Αντίστοιχα, αποδεικνύεται ότι αν οι πραγματικοί αριθμοί α και β είναι ετερόσημοι[1] και $\alpha<\beta$ τότε θα είναι και:

$$\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{\beta}.$$

Π_2: **Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:**

$$\text{Αν}\ \{\alpha>\beta \quad \text{και} \quad x>0\ \}\Rightarrow \alpha x>\beta x,\ \ \frac{\alpha}{x}>\frac{\beta}{x}.$$

Θα αποδείξουμε για παράδειγμα ότι αν: $\alpha>\beta$ και $x>0\Rightarrow\alpha x>\beta x$.

Πράγματι: Αν $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha-\beta>0$ και:

[1] Οπότε $\alpha\beta<0$.

$$\boldsymbol{\alpha x}-\boldsymbol{\beta x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})>0 \Leftrightarrow \alpha x>\beta x.$$

Με ανάλογους συλλογισμούς διαπιστώνουμε την αλήθεια της συνεπαγωγής:

$$\boldsymbol{A\nu}\ \{\boldsymbol{\alpha}>\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad x>0\ \} \Rightarrow \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{x}}>\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{x}}.$$

$\boldsymbol{\Pi_3}$ ***Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά. Δηλαδή:***

$$\boldsymbol{A\nu}\ \{\boldsymbol{\alpha}>\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad x<0\ \} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha x}<\beta x, \quad \frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{x}}<\frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{x}}.$$

$\boldsymbol{\Pi_4}$: ***Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ομοιόστροφες ανισότητες τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:***

$$\boldsymbol{A\nu}\ \{\boldsymbol{\alpha}>\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad x>\psi\ \} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{x}>\beta+\psi \quad ή \quad \{\boldsymbol{\alpha}<\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad x<\psi\ \} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{x}<\beta+\psi.$$

Θα αποδείξουμε για παράδειγμα ότι αν: $\boldsymbol{\alpha}>\beta$ $\boldsymbol{\kappa\alpha\iota}$ $\boldsymbol{x}>\boldsymbol{\psi} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{x}>\beta+\boldsymbol{\psi}.$

Πράγματι: Αν $\boldsymbol{\alpha}>\beta$ $\boldsymbol{\kappa\alpha\iota}$ $\boldsymbol{x}>\psi \Leftrightarrow \alpha-\beta>0, \quad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\psi}>0 \quad \kappa\alpha\iota$:

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{x}-(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\psi})=\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\psi}=(\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta})+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\psi})>0 \Leftrightarrow \alpha+\boldsymbol{x}>\beta+\psi.$$

$\boldsymbol{\Pi_5}$: ***Αν*** $\{\boldsymbol{\alpha}>\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta>x\ \} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}>x$ $\mapsto$ ***Μεταβατική Ιδιότητα***

Πράγματι: Αν $\boldsymbol{\alpha}>\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta>x \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}>\beta+\boldsymbol{x} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\beta}>\beta+\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\beta} \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}>\boldsymbol{x}.$

$\boldsymbol{\Pi_6}$: ***Για*** $\{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\psi}>0 \quad ή \quad \beta,\ \boldsymbol{x}>0\}$ $\boldsymbol{\alpha\nu}$ $\boldsymbol{\alpha}>\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \boldsymbol{x}>\psi \Rightarrow \alpha x>\beta\psi$

Πράγματι:

Έστω $\{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\psi}>0\,, \quad \alpha>\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \boldsymbol{x}>\psi\,\}.$

Είναι τότε: $\{\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\psi}>0\,, \quad \alpha-\beta>0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \boldsymbol{x}-\boldsymbol{\psi}>0\,\} \qquad (\mathbf{1}) \quad \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}$:

$$\alpha x-\beta\psi=\alpha x-\alpha\psi+\alpha\psi-\beta\psi=\alpha(x-\psi)+\psi(\alpha-\beta)>0\Leftrightarrow \alpha x>\beta\psi.$$

Αντίστοιχα, αν $\{\beta,\ x>0,\quad \alpha>\beta\ \ \kappa\alpha\iota\ \ x>\psi\}$ ***τότε:***

$$\alpha x-\beta\psi=\alpha x-\beta x+\beta x-\beta\psi=x(\alpha-\beta)+\beta(x-\psi)>0\Leftrightarrow \alpha x>\beta\psi.$$

Π_7: ***Για*** $\{\alpha,\ \psi<0\ \ \text{ή}\ \ \beta,\ x<0\}$ $\alpha\nu$ $\alpha>\beta$ $\kappa\alpha\iota$ $x>\psi\Rightarrow \alpha x<\beta\psi.$

Π_8: $A\nu$ $\{\alpha,\ \beta>0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \nu\in N\ \}$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \eta$ $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha^\nu>\beta^\nu$

Π_9: $A\nu$ $\{\alpha,\beta<0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \nu\in N\ \}$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \eta$ $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha^{2\nu}<\beta^{2\nu}$

Π_{10}: $A\nu$ $\{\alpha,\beta\in IR\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \nu\in N\ \}$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \ \eta$ $\alpha>\beta\Leftrightarrow\alpha^{2\nu+1}>\beta^{2\nu+1}$

Π_{11}: ***Το τετράγωνο και γενικότερα κάθε άρτια δύναμη οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι αριθμός μη αρνητικός[2], δηλαδή:***

$\Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ \alpha\in IR\ \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$: $\alpha^2\geq 0$ $\kappa\alpha\iota$ $\alpha^{2\nu}\geq 0,\ \ \nu\in N.$ ***Η ισότητα ισχύει μόνον όταν*** $\alpha=0.$

Συνέπεια αυτής της ιδιότητας είναι η πρόταση:

Αν για τους πραγματικούς $\alpha\ \kappa\alpha\iota\ \beta$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$ $\alpha^2+\beta^2=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=0.$

[2] *Δηλαδή θετικός ή μηδέν*

Λυμένα Θέματα:

1. ***Αν*** $\alpha, \beta \in IR$, $\alpha < \beta$ ***να δείξετε ότι:***

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \qquad (1).$$

Απόδειξη 1η:

Θα αποδείξουμε ότι:

$$\alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad (1') \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \qquad (1'')$$

Πράγματι η σχέση

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \alpha < \beta + \alpha \Rightarrow 2\alpha < \alpha + \beta \Rightarrow \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad (1') \qquad \kappa\alpha\iota$$

$$\alpha < \beta \Rightarrow \alpha + \beta < \beta + \beta \Rightarrow \alpha + \beta < 2\beta \Rightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \qquad (1'').$$

Από τις $(1')$ $\kappa\alpha\iota$ $(1'') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \qquad (1).$$

Απόδειξη 2η:

Είναι:

$$\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{2\alpha - \alpha - \beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} \overset{\alpha<\beta}{<} 0 \Leftrightarrow \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} \qquad (1') \qquad \kappa\alpha\iota$$

$$\frac{\alpha + \beta}{2} - \beta = \frac{\alpha + \beta - 2\beta}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} \overset{\alpha<\beta}{<} 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \qquad (1'').$$

Από τις $(1')$ $\kappa\alpha\iota$ $(1'') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha < \frac{\alpha + \beta}{2} < \beta \qquad (1).$$

Στηριζόμενοι στην αλήθεια της πρότασης (1), μπορείτε να σκεφτείτε πόσοι πραγματικοί αριθμοί βρίσκονται στο διάστημα $(1,2)$ και γενικότερα ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε άνισους πραγματικούς α και β;

2. ***Αν*** $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi} > \in \boldsymbol{IR},\quad \boldsymbol{\alpha} < \beta$ $\quad\kappa\alpha\iota\quad$ $\boldsymbol{x} > \psi$ ***δείξτε ότι:***

$$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x} < \beta - \psi \qquad (\mathbf{1}).$$

Απόδειξη 1η:

Είναι:

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} < \beta \\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \\ \boldsymbol{x} > \psi \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} < 0 \\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \\ \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\psi} > 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} < 0 \\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \\ -(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\psi}) < 0 \end{Bmatrix} \overset{(+)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta} + [-(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\psi})] < 0 \Rightarrow \alpha - \beta - (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\psi}) < 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x} < \beta - \psi \qquad (\mathbf{1}).$$

Απόδειξη 2η:

Είναι:

$$\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x} - (\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\psi}) = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\psi} = (\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{x}) \overset{\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}<0,\ \psi-\boldsymbol{x}<0}{<} \mathbf{0},$$

αφού:

$$\boldsymbol{\alpha} < \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta < 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \boldsymbol{x} > \psi \Leftrightarrow \psi < \boldsymbol{x} \Leftrightarrow \boldsymbol{\psi} - \boldsymbol{x} < \mathbf{0}.$$

3. ***Αν*** $\boldsymbol{\alpha},\ \boldsymbol{\beta},\ \boldsymbol{x},\ \boldsymbol{\psi} > \mathbf{0},\quad \boldsymbol{\alpha} < \beta$ $\quad\kappa\alpha\iota\quad$ $\boldsymbol{x} > \psi$ ***δείξτε ότι:***

$$\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{x}} < \frac{\boldsymbol{\beta}}{\boldsymbol{\psi}} \qquad (\mathbf{1}).$$

Απόδειξη 1η:

Πράγματι, από τις σχέσεις:

$$\left.\begin{cases} 0 < \alpha < \beta \\ \kappa\alpha\iota \\ x > \psi > 0 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} 0 < \alpha < \beta \\ \kappa\alpha\iota \\ 0 < \frac{1}{x} < \frac{1}{\psi} \end{cases}\right\} \Rightarrow \alpha.\frac{1}{x} < \beta.\frac{1}{\psi} \Rightarrow \frac{\alpha}{x} < \frac{\beta}{\psi} \qquad (1).$$

Απόδειξη 2η:

Θεωρούμε την διαφορά:

$$\frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{\psi} = \frac{\alpha\psi - \beta x}{x\psi} = \frac{\alpha\psi - \beta x - \alpha x + \alpha x}{x\psi} = \frac{\alpha(\psi - x) + x(\alpha - \beta)}{x\psi} \qquad (1').$$

αφού:

Είναι όμως:

$$\left.\begin{cases} \alpha < \beta \\ \kappa\alpha\iota \\ x > \psi \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \alpha - \beta < 0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \psi - x < 0 \end{cases}\right\} \overset{\alpha,\ x>0}{\Rightarrow} \alpha(\psi - x) + x(\alpha - \beta) < 0 \overset{x,\psi>0}{\Rightarrow} \frac{\alpha(\psi - x) + x(\alpha - \beta)}{x\psi} < 0 \qquad (1'').$$

Από τις $(1')$ *και* $(1'') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{\alpha}{x} - \frac{\beta}{\psi} < 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{x} < \frac{\beta}{\psi}.$$

4. *Αν* $2 < \alpha < 6,\ 4 < \beta < 8$ *να βρείτε μεταξύ ποίων αριθμών μεταβάλλονται οι παραστάσεις:*

$$\Pi_1 = \alpha - \beta,\quad \Pi_2 = 2\alpha - 3\beta,\quad \Pi_3 = \frac{\alpha}{\beta} \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_4 = \frac{\alpha - 1}{\beta - 3};$$

Λύση:

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\left.\begin{cases} 2 < \alpha < 6 \\ \kappa\alpha\iota \\ 4 < \beta < 8 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} 2 < \alpha < 6 \\ \kappa\alpha\iota \\ -8 < -\beta < -4 \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -6 < \alpha - \beta < 2 \qquad (1),$$

$$\left.\begin{cases} 2 < \alpha < 6 \\ \kappa\alpha\iota \\ 4 < \beta < 8 \end{cases}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} 4 < 2\alpha < 12 \\ \kappa\alpha\iota \\ -24 < -3\beta < -12 \end{cases}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} -20 < 2\alpha - 3\beta < 0 \qquad (2),$$

$$\begin{Bmatrix} 2<\alpha<6 \\ \kappa\alpha\iota \\ 4<\beta<8 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0<2<\alpha<6 \\ \kappa\alpha\iota \\ 0<\frac{1}{8}<\frac{1}{\beta}<\frac{1}{4} \end{Bmatrix} \overset{(\times)}{\Rightarrow} \frac{1}{4}<\frac{\alpha}{\beta}<\frac{3}{2} \qquad (3) \quad \kappa\alpha\iota$$

$$\begin{Bmatrix} 2<\alpha<6 \\ \kappa\alpha\iota \\ 4<\beta<8 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1<\alpha-1<5 \\ \kappa\alpha\iota \\ 1<\beta-3<5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0<1<\alpha-1<5 \\ \kappa\alpha\iota \\ 0<\frac{1}{5}<\frac{1}{\beta-3}<1 \end{Bmatrix} \overset{(\times)}{\Rightarrow} \frac{1}{5}<\frac{\alpha-1}{\beta-3}<5 \qquad (4).$$

5. ***Αν*** $3<\alpha<9,\ \ -4<\beta<-1$ ***να βρείτε μεταξύ ποίων αριθμών μεταβάλλονται οι παραστάσεις:***

$$\Pi_1=\alpha-\beta, \qquad \Pi_2=\frac{\alpha}{\beta} \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_4=\frac{\alpha-1}{\beta-3};$$

Λύση:

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\begin{Bmatrix} 3<\alpha<9 \\ \kappa\alpha\iota \\ -4<\beta<-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3<\alpha<9 \\ \kappa\alpha\iota \\ 1<-\beta<4 \end{Bmatrix} \overset{(+)}{\Rightarrow} 4<\alpha-\beta<13 \qquad (1),$$

$$\begin{Bmatrix} 3<\alpha<9 \\ \kappa\alpha\iota \\ -4<\beta<-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0<3<\alpha<9 \\ \kappa\alpha\iota \\ 0<1<-\beta<4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 3<\alpha<9 \\ \kappa\alpha\iota \\ \frac{1}{4}<\frac{1}{-\beta}<1 \end{Bmatrix} \overset{(\times)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}<\frac{\alpha}{-\beta}<9 \Rightarrow \frac{3}{4}<-\frac{\alpha}{\beta}<9 \Rightarrow -9<\frac{\alpha}{\beta}<-\frac{3}{4} \qquad (2) \qquad \kappa\alpha\iota$$

$$\begin{Bmatrix} 3<\alpha<9 \\ \kappa\alpha\iota \\ -4<\beta<-1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2<\alpha-1<8 \\ \kappa\alpha\iota \\ -7<\beta-3<-4 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 2<\alpha-1<8 \\ \kappa\alpha\iota \\ 4<-(\beta-3)<7 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} 0<2<\alpha-1<8 \\ \kappa\alpha\iota \\ 0<\frac{1}{7}<\frac{1}{-(\beta-3)}<\frac{1}{4} \end{Bmatrix} \overset{(\times)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{7}<\frac{\alpha-1}{-(\beta-3)}<2 \Rightarrow -2<\frac{\alpha-1}{\beta-3}<-\frac{2}{7}.$$

6. Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β είναι:

$$\alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha\beta.$$

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε ότι η διαφορά των αριθμών $\alpha^2 + \beta^2$ και $2\alpha\beta$ είναι αριθμός μη αρνητικός.

Πράγματι:

$$\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq 2\alpha\beta \qquad (1).$$

Η ισότητα στην (1) ισχύει προφανώς όταν $(\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$.

Όμοια, είναι:

$$\alpha^2 + \beta^2 - (-2\alpha\beta) = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - (-2\alpha\beta) \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq -2\alpha\beta \qquad (2).$$

Η ισότητα στην (2) ισχύει προφανώς όταν $(\alpha + \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\beta$.

7. Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β είναι:

$$2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 \geq \alpha\beta.$$

Απόδειξη:

Είναι:

- $2(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta)^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2 - \alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2) - (\alpha + \beta)^2 = (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (\alpha + \beta)^2 \qquad (1).$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα στην (1) ισχύει όταν $(\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ και

- $\alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = \frac{1}{2}(2\alpha^2 + 2\beta^2 - 2\alpha\beta) = \frac{1}{2}[\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta)] \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta = \frac{1}{2}[\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha - \beta)^2] \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 - \alpha\beta \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 \geq \alpha\beta \qquad (2).$$

Η ισότητα στην (2) *ισχύει προφανώς όταν* $\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha - \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0.$

8. *Δείξτε ότι για οποιονδήποτε αριθμό* $\alpha \in IR$ *δείξτε ότι:*

$$\text{Αν } \alpha > 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \qquad \text{ενώ αν } \alpha < 0 \Rightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2.$$

Απόδειξη:

Έστω $\alpha > 0$. *Είναι τότε:*

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{\alpha^2 + 1 - 2\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2 \qquad (1).$$

Η ισότητα στην (1) *ισχύει όταν:* $(\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$

Όμοια, αν $\alpha < 0$ *τότε:*

$$\alpha + \frac{1}{\alpha} - (-2) = \cdots = \frac{(\alpha + 1)^2}{\alpha} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha + \frac{1}{\alpha} \leq -2 \qquad (2).$$

Η ισότητα στην (2) *ισχύει όταν:* $(\alpha + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -1.$

9. *Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς* α *και* β *είναι:*

$$\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta}, \qquad \alpha + 2\beta \geq 2\sqrt{2\alpha\beta}.$$

Απόδειξη:

Είναι $\alpha, \beta \geq 0$. *Επομένως* $\alpha + \beta \geq 0$ *και* $\sqrt{\alpha\beta} \geq 0$, $\alpha + 2\beta \geq 0$ *και* $\sqrt{2\alpha\beta} \geq 0.$

Υποθέτουμε ότι ισχύει: $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow (\alpha + \beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha - \beta)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει για κάθε } \alpha, \beta \geq 0.$$

Επομένως λόγω ισοδυναμίας ισχύει και η $\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (1).$

Η ισότητα στην (1) *ισχύει όταν* $(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$.

Όμοια, έστω ότι:

$$\alpha+2\beta \geq 2\sqrt{2\alpha\beta} \Leftrightarrow (\alpha+2\beta)^2 \geq 8\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-2\beta)^2 \geq 0 \quad \text{που ισχύει για κάθε } \alpha,\beta \geq 0.$$

Επομένως λόγω ισοδυναμίας ισχύει και η $\alpha+2\beta \geq 2\sqrt{2\alpha\beta}$ (2).

Η ισότητα στην (2) *ισχύει όταν* $(\alpha-2\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=2\beta$.

10. *Δίδεται η παράσταση* $\Pi=x^3+x^2-5x+3$.

- *Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση* Π.
- *Αν* $x>0$ *να δείξετε ότι:* $x^3+x^2 \geq -5x+3$ (1).

Λύση:

Είναι:

- $\Pi=x^3+x^2-5x+3=x^3+x^2-x-x-3x+3=(x^3-x)+(x^2-x)-(3x-3)=$

$$=x(x^2-1)+x(x-1)-3(x-1)=x(x-1)(x+1)+x(x-1)-3(x-1) \Rightarrow$$

$$=(x-1)[x(x+1)+x-3]=(x-1)(x^2+2x-3) \Rightarrow$$

$$=(x-1)(x^2+2x-2-1)=(x-1)[(x^2-1)+2(x-1)]=$$

$$=(x-1)[(x-1)(x+1)+2(x-1)]=(x-1)^2(x+3) \quad \text{και}$$

- $x^3+x^2-(-5x+3)=x^3+x^2-5x+3=(x-1)^2(x+3) \overset{x>0}{\geq} 0$.

Η ισότητα στην (1) *ισχύει όταν είναι:*

$$(x-1)^2(x+3)=0 \overset{x>0}{\Rightarrow} x=1.$$

11. Αν $\alpha,\ \beta > 0$ δείξτε ότι:

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \geq 4 \qquad (1).$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε[3] την διαφορά:

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)-4 = 1+\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}+1-4 = \frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2 = \frac{\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta} = \frac{(\alpha-\beta)^2}{\alpha\beta} \overset{\alpha,\beta>0}{\geq} 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right) \geq 4.$$

Η ισότητα στην (1) ισχύει όταν: $(\alpha-\beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$

12. Αν $\alpha,\ \beta > 0,\ \alpha+\beta = 1$ να δείξετε ότι: $4\alpha\beta \leq 1 \qquad (1).$

Απόδειξη:

Θεωρούμε την διαφορά:

$$4\alpha\beta - 1 \overset{\alpha+\beta=1}{=} 4\alpha(1-\alpha)-1 = 4\alpha-4\alpha^2-1 = -(4\alpha^2-4\alpha+1) = -(2\alpha-1)^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha\beta - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq 1.$$

Η ισότητα στη σχέση (1) ισχύει όταν είναι:

$$(2\alpha-1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{2},\ \ \text{οπότε τότε είναι και}\ \ \beta = 1-\alpha = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

[3] *Διαφορετικά εκτελέστε τις πράξεις στο 1ο μέλος της (1) και λάβετε υπόψη ότι το άθροισμα δυο θετικών αντιστρόφων αριθμών είναι μεγαλύτερο ή ίσον του 2.*

Ασκήσεις για λύση:

1. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in IR$, $\alpha < \beta < \gamma$ να δείξετε ότι:

$$\alpha < \frac{\alpha+\beta+\gamma}{3} < \beta \qquad (1).$$

2. Αν $\alpha, \beta, x, \psi \in IR$, $\alpha < \beta$ και $x > \psi$ δείξτε ότι:

$$\alpha + 2\psi < \beta + 2x \qquad (1).$$

3. Αν $3 < \alpha < 7,\ 5 < \beta < 9$ να βρείτε μεταξύ ποίων αριθμών μεταβάλλονται οι παραστάσεις:

$$\Pi_1 = \alpha + \beta, \quad \Pi_2 = 2\beta - 3\alpha \quad \text{και} \quad \Pi_3 = \frac{\alpha - 2}{\beta - 4};$$

4. Δίδεται η παράσταση $\Pi = x^3 - 2x^2 + x - 2$.

- Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση Π.
- Αν $x \geq 2$ να δείξετε ότι: $x^3 + x \geq 2x^2 + 2$.

5. Αν $\alpha, \beta > 0$ δείξτε ότι:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \geq \sqrt{\alpha\beta} \geq \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} \qquad (1).$$

6. Αν $\alpha, \beta > 0$ δείξτε ότι:

$$\alpha + \beta \geq 2\sqrt{\alpha\beta} \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \quad (2).$$

7. Αν $\alpha, \beta, \gamma > 0$ δείξτε ότι:

$$\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} \geq 2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{\alpha+\beta}{\gamma} + \frac{\beta+\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma+\alpha}{\beta} \geq 6 \quad (2).$$

8. ***Αν*** $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0$ ***δείξτε ότι:***

$$(\alpha+\beta+\gamma)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}\right)\geq 9 \quad (1).$$

9. ***Αν*** $\alpha,\ \beta > 0,\quad \alpha+\beta=2$ ***να δείξετε ότι:***

$$\alpha\beta \leq 1 \quad (1) \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(2+\frac{1}{\alpha}\right)\left(2+\frac{1}{\beta}\right)\geq 9 \quad (2).$$

10. ***Αν*** $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0$ ***να δείξετε ότι:***

$$(\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \quad (1),\quad \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{4} \quad (2) \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta}+\frac{\beta\gamma}{\beta+\gamma}+\frac{\gamma\alpha}{\gamma+\alpha}\leq\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} \quad (3).$$

11. ***Αν*** $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0,\quad \alpha+\beta+\gamma=1$ ***δείξτε ότι:***

$$\sqrt{\alpha\beta}\leq\frac{\alpha+\beta}{2} \quad (1),\quad \sqrt{2\alpha+1}<\alpha+1 \quad (2) \quad \kappa\alpha\iota \quad \sqrt{2\alpha+1}+\sqrt{2\beta+1}+\sqrt{2\gamma+1}<4$$

12. ***Αν*** $\alpha,\ \beta > 0,\quad \alpha+\beta=1$ ***δείξτε ότι:***

$$4\alpha\beta\leq 1 \quad (1),\quad \alpha^2+\beta^2\geq\frac{1}{2} \quad (2) \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2+\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^2\geq\frac{25}{2} \quad (3).$$