Μαθηματικά Α΄ Λυκείου - Λογισμός στο σύνολο IR

Ταυτότητες - Παραγοντοποίηση - Απλοποίηση Κλασμάτων

Ορισμός: ***Ταυτότητα ονομάζουμε κάθε ισότητα δύο αλγεβρικών παραστάσεων οι οποίες καθίστανται αριθμητικά ίσες για κάθε επιτρεπτή[1] τιμή των μεταβλητών της.***

Παράδειγμα 1ο: ***Οι παρακάτω ισότητες:***

$$\mathbf{0.x=0,\quad x+y-(x-y)=2y,\quad x^2-4=(x-2)(x+2)}$$

είναι ταυτότητες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αφού αληθεύουν για οποιεσδήποτε πραγματικές τιμές των μεταβλητών τους.

Παράδειγμα 2ο: ***Οι ισότητες:***

$$\mathbf{2x=1\qquad \kappa\alpha\iota \qquad x^2-2=x(x-1)}$$

δ έ ν είναι ταυτότητες στο IR, αφού για παράδειγμα:

- ***Η ισότητα*** $\mathbf{2x=1}$ ***για*** $\mathbf{x=0\in IR \Rightarrow 2.0=1}$, $\boldsymbol{\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o\nu}$, ***ενώ η***
- ***Ισότητα*** $\mathbf{x^2-2=x(x-1)}$ ***για*** $\mathbf{x=0 \Rightarrow -2=0}$, $\boldsymbol{\alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o\nu}$.

Σημείωση: ***Οι παραπάνω ισότητες*** $\mathbf{2x=1}$ ***και*** $\mathbf{x^2-2=x(x-1)}$ ***δεν είναι ταυτότητες στο IR, είναι όμως εξισώσεις σ' αυτό, με λύσεις αντίστοιχα, τις:***

$$\mathbf{x=\frac{1}{2}\qquad \kappa\alpha\iota \qquad x=2.}$$

---

[1] *Δηλαδή για κάθε τιμή από το κοινό σύνολο ορισμού των δύο παραστάσεων.*

Βασικές ταυτότητες: ***Ταυτότητες η αλήθεια των οποίων θεωρείται δεδομένη ονομάζονται βασικές ταυτότητες. Μερικές εξ' αυτών είναι οι παρακάτω:***

Για κάθε $\alpha, \beta, \gamma \in IR$ είναι:

- $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$ ↦ ***Τετράγωνο αθροίσματος***
- $(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$ ↦ ***Τετράγωνο διαφοράς***
- $(\alpha+\beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$ ↦ ***Κύβος αθροίσματος***
- $(\alpha-\beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$ ↦ ***Κύβος διαφοράς***
- $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ ↦ ***Διαφορά Τετραγώνων***
- $\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha+\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$ ↦ ***Άθροισμα Κύβων***
- $\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha-\beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$ ↦ ***Διαφορά Κύβων***
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma + 2\gamma\alpha$ ↦ ***Τετράγωνο τριωνύμου***

Άλλες Ταυτότητες:

- $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) = (ax \pm \beta y)^2 + (ay \mp \beta x)^2$
- $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha = \frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$
- $\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma = \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]$ ↦ ***Ταυτότητα Euler***
- $\left(\frac{\alpha^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2 + \alpha^2$ ↦ ***Ταυτότητα Πυθαγόρα***
- $(x+\alpha)(x+\beta) = x^2 + (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$
- $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+y^2) - (ax+\beta y)^2 = (ay-\beta x)^2$ ↦ ***Ταυτότητα Lagrange***
- $\alpha^4+\beta^4+\gamma^4-2\alpha^2\beta^2-2\beta^2\gamma^2-2\gamma^2\alpha^2 = -(\alpha+\beta+\gamma)(-\alpha+\beta+\gamma)(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha+\beta-\gamma)$ ↦

↦ ***Ταυτότητα Moivre.***

Ταυτότητες υπό συνθήκη:

Ορισμός: ***Ταυτότητα υπό συνθήκη ονομάζουμε κάθε ταυτότητα της οποίας οι μεταβλητές συνδέονται με μια ή περισσότερες συνθήκες (δεσμεύσεις).***

Παράδειγμα: ***Εάν*** $\alpha,\beta,\gamma \in IR,\quad a^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma$.

Η παραπάνω πρόταση είναι συνέπεια της ταυτότητας Euler και η απόδειξη της έχει ως ακολούθως:

Σύμφωνα με την ταυτότητα του Euler για κάθε $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in IR$ ***είναι:***

$$a^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right] \quad (1).$$

Είναι όμως:

$$a^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma \Leftrightarrow a^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma=0 \quad (2).$$

Από τις (1) ***και*** (2) ***έχουμε:***

$$\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \text{ή}\\ (\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=0\end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix}\alpha+\beta+\gamma=0\\ \text{ή}\\ \alpha=\beta=\gamma\end{matrix}\right\}.$$

Άλλα παραδείγματα ταυτοτήτων υπό συνθήκες:

- ***Εάν*** $\alpha,\beta,\gamma \in IR,\quad \alpha+\beta+\gamma=0$ ή $\alpha=\beta=\gamma \Rightarrow a^3+\beta^3+\gamma^3=3\alpha\beta\gamma$.
- ***Εάν*** $\alpha,\beta,\gamma \in IR$ ***και*** $a^3+\beta^3+\gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma \geq 0$.
- ***Εάν*** $\alpha,\beta,\gamma \in IR$ ***και*** $a^3+\beta^3+\gamma^3 \leq 3\alpha\beta\gamma \Rightarrow \alpha+\beta+\gamma \leq 0$.
- ***Εάν*** $\alpha,\beta,\gamma \in IR$ ***και*** $\alpha+\beta+\gamma>0 \Rightarrow a^3+\beta^3+\gamma^3 \geq 3\alpha\beta\gamma$.
- ***Εάν*** $\alpha,\beta,\gamma \in IR$ ***και*** $\alpha+\beta+\gamma=0 \Rightarrow a^4+\beta^4+\gamma^4=2\alpha^2\beta^2+2\beta^2\gamma^2+2\gamma^2\alpha^2$.

Λυμένα θέματα

1. **Να εξετάσετε αν η ισότητα:**

$$x^3+\psi^3=(x+\psi)^3-3x\psi(x+\psi), \qquad x,\ \psi \in IR \qquad (1)$$

είναι ταυτότητα.

Λύση:

Το δεύτερο μέλος της (1) γράφεται:

$$(x+\psi)^3-3x\psi(x+\psi)=x^3+3x^2\psi+3x\psi^2+\psi^3-3x^2\psi-x\psi^2=x^3+\psi^3.$$

Επομένως η ισότητα (1) είναι ταυτότητα.

2. **Να εξετάσετε αν η ισότητα:**

$$(x+\psi)^2-(x-\psi)^2=x\psi, \qquad x,\ \psi \in IR \qquad (1)$$

είναι ταυτότητα.

Λύση:

Η ισότητα (1) για[2] $x=\psi=1 \Rightarrow$

$$2^2-0^2=1 \Leftrightarrow 4=1, \qquad \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o\nu.$$

Επομένως η ισότητα (1) δ έ ν είναι ταυτότητα.

3. **Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β είναι:**

$$\alpha^2-\alpha\beta=\alpha\beta-\beta^2 \qquad (1).$$

να δείξετε ότι: $\alpha=\beta$.

Απόδειξη:

Η (1) γράφεται: $\alpha^2-\alpha\beta=\alpha\beta-\beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2-\alpha\beta-\alpha\beta+\beta^2=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2=0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha-\beta=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta.$$

[2] Για να δείξουμε ότι μια ισότητα δ ε ν είναι ταυτότητα αρκεί να βρούμε τιμές των μεταβλητών της για τις οποίες δεν ισχύει.

4. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- $(\alpha-4\beta)^2=\cdots,\qquad \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\cdots$
- $(2\alpha-\beta)^3=\cdots,\qquad (3\alpha+\beta)^3=\cdots$

Λύση:

- $(\alpha-4\beta)^2=\alpha^2-2.\alpha.4\beta+(4\beta)^2=\alpha^2-8\alpha\beta+16\beta^2$ ***και***

$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+2.\alpha.\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+2+\frac{1}{\alpha^2}.$

- $(2\alpha-\beta)^3=(2\alpha)^3-3.(2\alpha)^2.\beta+3.(2\alpha).\beta^2-\beta^3=8\alpha^3-3.4\alpha^2.\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3\Rightarrow$

$\Rightarrow(2\alpha-\beta)^3=8\alpha^3-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3$ ***και***

$(3\alpha+\beta)^3=(3\alpha)^3+3.(3\alpha)^2.\beta+3.(3\alpha).\beta^2+\beta^3=27\alpha^3+27\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2+\beta^3.$

5. Να βρείτε τα εξαγόμενα:

- $(\alpha-2\beta)(2\beta+\alpha)$ ***και*** $(-\alpha-3\beta)(\alpha-3\beta)$
- $(\alpha+2\beta)^2-(\alpha-2\beta)^2+(4\beta-\alpha)(\alpha+4\beta)+2\alpha^2$
- $(\alpha+2)(\alpha^2-2\alpha+4)$ ***και*** $(2\alpha-1)(4\alpha^2+2\alpha+1)$
- $(\alpha+2\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2)$ ***και*** $(2\alpha-\beta)(4\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$

Λύση:

Οι δοσμένες παραστάσεις γράφονται:

- $(\alpha-2\beta)(2\beta+\alpha)=(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)=\alpha^2-(2\beta)^2=\alpha^2-4\beta^2$ ***και***

$(-\alpha-3\beta)(\alpha-3\beta)=-(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta)=-[\alpha^2-(3\beta)^2]=-(\alpha^2-9\beta^2)=9\beta^2-\alpha^2.$

- $(\alpha+2\beta)^2-(\alpha-2\beta)^2+(4\beta-\alpha)(\alpha+4\beta)+2\alpha^2=$

$=\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-(\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2)+(4\beta-\alpha)(4\beta+\alpha)+2\alpha^2=$

$$= \alpha^2 + 4\alpha\beta + 4\beta^2 - \alpha^2 + 4\alpha\beta - 4\beta^2 + 16\beta^2 - \alpha^2 + 2\alpha^2 = \alpha^2 + 8\alpha\beta + 16\beta^2 = (\alpha + 4\beta)^2$$

- $(\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 4) = (\alpha + 2)(\alpha^2 - 2\alpha + 2^2) = \alpha^3 + 2^3 = \alpha^3 + 4$ *και*

$(2\alpha - 1)(4\alpha^2 + 2\alpha + 1) = (2\alpha - 1)[(2\alpha)^2 + 2\alpha.1 + 1^2] = (2\alpha)^3 - 1^3 = 8\alpha^3 - 1.$

6. Αν $\alpha, \beta, \gamma \in IR$ ***να δείξετε ότι:***

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta \quad \text{και} \quad \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta \qquad (1),$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) \qquad (2), \qquad (\alpha + \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) \qquad (3), \quad \text{και}$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha = \frac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] \qquad (4).$$

Απόδειξη:

Είναι γνωστό ότι: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$

ή διαφορετικά, $(\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - 2\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2.$

Όμοια, $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \Rightarrow \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha - \beta)^2 + 2\alpha\beta.$

Για την απόδειξη της (3) ***παίρνουμε το πρώτο μέλος της εκτελούμε τις πράξεις και έχουμε:***

$$(\alpha + \beta)^2 + \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 + \alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 2(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2).$$

Όμοια, για την απόδειξη της (4) ***εκτελούμε τις πράξεις ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της και έχουμε:***

$$\frac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 + \beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2 + \gamma^2 - 2\gamma\alpha + \alpha^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(2\alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 - 2\beta\gamma + 2\gamma^2 - 2\gamma\alpha) = \frac{1}{2}.2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}[(\alpha - \beta)^2 + (\beta - \gamma)^2 + (\gamma - \alpha)^2] = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha\beta - \beta\gamma - \gamma\alpha).$$

7. *Μπορείτε να βρείτε γρήγορα τα γινόμενα:*

$$99.101, \quad 29.31 \quad \kappa\alpha\iota \quad 19^2+38+1^2;$$

Λύση:

Είναι:

$$99.101=(100-1)(100+1)=100^2-1^2=10000-1=9999,$$

$$29.31=(30-1)(30+1)=30^2-1^2=899 \quad \kappa\alpha\iota$$

$$19^2+38+1^2=19^2+2.19+1^2=(19+1)^2=20^2=400.$$

Πως θα βρείτε γρήγορα το εξαγόμενο 24.16;

8. *Αν είναι* $\alpha+\beta=3$ *και* $\alpha\beta=2$ *να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:*

$$\Pi_1=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}, \quad \Pi_2=\alpha^2+\beta^2, \quad \Pi_3=\alpha^4+\beta^4 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_4=\alpha^3+\beta^3.$$

Λύση:

Εκτελούμε τις πράξεις στην παράσταση Π_1 *και έχουμε:*

$$\Pi_1=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{2}.$$

Η παράσταση Π_2 *γράφεται:*

$$\Pi_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2.2=5.$$

Όμοια, είναι:

$$\Pi_3=\alpha^4+\beta^4=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2(\alpha\beta)^2=5^2-2.2^2=17 \quad \kappa\alpha\iota$$

$$\Pi_4=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3.2.5=-3.$$

Ασκήσεις για λύση

1. Να εξετάσετε αν οι ισότητες:

$$x = x^2 + 1 \quad και \quad x^2 + 1 = (x+1)^2 - 2x, \qquad x \in IR$$

είναι ταυτότητες στο IR.

2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) ή (Λ) αν είναι σωστές ή εσφαλμένες αντίστοιχα.

$(\alpha+1)(\alpha^2+\alpha+1) = \alpha^3+1$, για κάθε $\alpha, \beta \in IR$ (Σ) ☐ (Λ) ☐

$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in IR$ (Σ) ☐ (Λ) ☐

$(\alpha-\beta)(-\beta-\alpha) = \beta^2-\alpha^2$, για κάθε $\alpha, \beta \in IR$ (Σ) ☐ (Λ) ☐

$(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) = \alpha^3-\beta^3$, για κάθε $\alpha, \beta \in IR$ (Σ) ☐ (Λ) ☐

3. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- $(\alpha+2\beta)^2$, $\left(\frac{\alpha}{2}+1\right)^2$ και $\left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}\right)^2$.
- $(2\alpha-\beta)^2$, $\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)^2$ και $\left(\frac{5\alpha}{2}-\frac{\beta}{5}\right)^2$.
- $(2\alpha+\beta)^3$, $(\alpha+2\beta)^3$ και $\left(3\alpha+\frac{\beta}{3}\right)^2$.
- $(\alpha-3\beta)^3$, $(3\alpha-2\beta)^3$ και $\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{3}\right)^3$
- $(\alpha^2+\beta)^2 = \cdots$, $\left(\alpha\beta-\frac{x^2}{2}\right)^2 = \cdots$, $\left(\frac{x\psi}{2}-\frac{1}{x\psi}\right)^2 = \cdots$, $\left(x\psi+\frac{1}{2x\psi}\right)^2 = \cdots$

4. ***Όμοια, τα αναπτύγματα:***

- $(\alpha+2\beta+\gamma)^2=\cdots,\quad (2\alpha+\beta-\gamma)^2=\cdots \quad \kappa\alpha\iota \quad (\alpha-2\beta-3\gamma)^2=\cdots$
- $\left(\alpha+2\beta+\frac{\gamma}{2}\right)^2=\cdots,\quad \left(2\alpha+\frac{\beta}{2}-\gamma\right)^2=\cdots \quad \kappa\alpha\iota \quad \left(\frac{\alpha}{2}-4\beta-\frac{\gamma}{2}\right)^2=\cdots.$

5. ***Να γράψετε απλούστερα τις παρακάτω παραστάσεις:***

- $\Pi_1=\alpha^2+10\alpha\beta+25\beta^2=\cdots,\quad \Pi_2=9\alpha^2+12\alpha\beta+4\beta^2=\cdots,\quad \Pi_3=\alpha^2+\alpha\beta+\frac{\beta^2}{4}=\cdots$
- $\Pi_1=4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2=\cdots,\quad \Pi_2=100\alpha^2-20\alpha\beta+\beta^2=\cdots,\quad \Pi_3=\frac{\alpha^2}{25}-2\alpha\beta+25\beta^2=\cdots$
- $\Pi_1=(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)=\cdots,\quad \Pi_2=(-3\alpha+\beta)(-3\alpha-\beta)=\cdots$
- $\Pi_1=\left(\frac{2\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{2\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}\right)=\cdots \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_2=(\alpha-3\beta)(\alpha+3\beta)(\alpha^2+9\beta^2)\ldots$
- $\Pi_1=8\alpha^3+36\alpha^2+54\alpha+27=\cdots,\quad \Pi_2=\alpha^3-12\alpha^2+48\alpha-64=\cdots$

6. ***Όμοια, τις παραστάσεις:***

- $\Pi_1=\alpha^3+9\alpha^2\beta+27\alpha\beta^2+27\beta^3=\cdots,\quad \Pi_2=8\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha-1=\cdots$
- $\Pi_1=\alpha^2+4\beta^2+9\gamma^2+4\alpha\beta+6\alpha\gamma+12\beta\gamma=\cdots \quad \kappa\alpha\iota$
- $\Pi_1=\alpha^2+\beta^2+4+2\alpha\beta-4\alpha-4\beta=\cdots$

7. ***Να βρείτε τα εξαγόμενα των πράξεων:***

- $(3\alpha-1)(3\alpha+1)=\cdots,\quad (2\alpha-5\beta)(2\alpha+5\beta)=\cdots,\quad (\alpha-4\beta)(-\alpha-4\beta)=\cdots,$
- $(-\alpha-3\beta)(\alpha-3\beta)=\cdots,\quad -(2\alpha-3\beta)(-2\alpha-3\beta)=\cdots,\quad \left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\left(-\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\cdots$
- $(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)=\cdots,\quad (\alpha-\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=\cdots,\quad (\alpha+\beta-2)(-\alpha+\beta-2)=\cdots$

8. *Όμοια, τα εξαγόμενα των πράξεων:*

- $(\alpha+3)(\alpha^2-3\alpha+9)$, $(2\alpha+3\beta)(4\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2)$,
- $(3\alpha-2\beta)(9\alpha^2+6\alpha\beta+4\beta^2)$ *και* $\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{9}+\frac{\alpha\beta}{6}+\frac{\beta^2}{4}\right)$.

9. *Αν για τους πραγματικούς αριθμούς* α *και* β *είναι:*

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha-\beta)^2$$

να δείξετε ότι: $\alpha=0$ ή $\beta=0$.

10. *Αν για τους πραγματικούς αριθμούς* α *και* β *ισχύει:*

$$(\alpha-\beta)^2=-2\alpha\beta$$

να δείξετε ότι $\alpha=\beta=0$.

11. *Αν* $\alpha,\beta,\ \gamma\in IR$ *να δείξετε την αλήθεια των παρακάτω ταυτοτήτων:*

- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ *και* $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ *και* $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$.
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$.

12. *Αν* $\alpha,\beta,\ \gamma,\ x,\ \psi,\ \omega\in IR$ *να δείξετε την αλήθεια των παρακάτω ταυτοτήτων:*

- $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2)=(\alpha x+\beta\psi)^2+(\alpha\psi-\beta x)^2$.
- $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2)=(\alpha x-\beta\psi)^2+(\alpha\psi+\beta x)^2$.
- $(x-\psi)(x-\omega)+(\psi-\omega)(\psi-x)+(\omega-x)(\omega-\psi)=x^2+\psi^2+\omega^2-x\psi-\psi\omega-\omega x$.
- $(\alpha^2+\beta^2)^2+4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2$.
- $(x^2-2x-1)^2+(x^2+2x-1)^2=2(x^2+1)^2$.

13. ***Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:***

- $\Pi_1 = 99.101 = \cdots, \quad \Pi_2 = 999.1001 = \cdots, \quad \Pi_3 = 9999.10001 = \cdots$
- $\Pi_1 = 999^2 + 1998 + 1 = \cdots, \quad \Pi_2 = 1001^2 - 2002 + 1 = \cdots,$
- $\Pi_1 = 102^2 - 408 + 4 = \cdots$ ***και*** $\Pi_2 = \sqrt{99^2 + 198 + 1} = \cdots$

14. ***Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:*** $\left(1 - \sqrt{3}\right)^2$ ***και*** $\sqrt{4 - 2\sqrt{3}}.$

15. ***Αν*** $\Pi(x) = x^2$ ***να βρείτε τα πολυώνυμα:***

$$f(x) = \Pi(x+1) - \Pi(x-1) \quad \text{και} \quad Q(x) = \Pi(x+1)\Pi(x-1) + 2x^2 - 1.$$

16. ***Αν*** $x + \psi = 1 \quad x\psi = -2$ ***να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:***

$$\Pi_1 = x^2 + \psi^2, \quad \Pi_2 = x^3 + \psi^3, \quad \Pi_3 = x^4 + \psi^4 \quad \text{και} \quad \Pi_4 = x^6 + \psi^6.$$

17. ***Αν*** $x - \psi = 2 \quad x\psi = 3$ ***να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:***

$$\Pi_1 = x^2 + \psi^2, \quad \Pi_2 = x^3 - \psi^3, \quad \Pi_3 = x^4 + \psi^4 \quad \text{και} \quad \Pi_4 = x^6 + \psi^6.$$

18. ***Αν*** $x + \frac{1}{x} = 5$ ***να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:***

$$\Pi_1 = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \Pi_2 = x^4 + \frac{1}{x^4}, \quad \Pi_3 = x^3 + \frac{1}{x^3} \quad \text{και} \quad \Pi_4 = x^6 + \frac{1}{x^6}.$$

19. ***Αν*** $x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2}$ ***να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:***

$$\Pi_1 = x^2 + \frac{1}{x^2}, \quad \Pi_2 = x^4 + \frac{1}{x^4} \quad \text{και} \quad \Pi_3 = x^6 + \frac{1}{x^6}.$$

20. ***Αν*** $x,\psi,\omega \in IR^*$, $\kappa\alpha\iota$

$$x+\psi+\omega=2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{\psi}+\frac{1}{\omega}=0$$

να δείξετε ότι:

$$x^2+\psi^2+\omega^2=4.$$

21. ***Αν*** $\alpha,\beta,x,\psi \in IR$, $\alpha\beta \neq 0$ $\kappa\alpha\iota$ $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2)=(\alpha x+\beta\psi)^2$ ***να δείξετε ότι:***

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{\psi}{\beta}.$$

Παραγοντοποίηση Πολυωνύμων - Απλοποίηση Κλασμάτων

Όταν λέμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο εννοούμε να το μετατρέψουμε σε γινόμενο παραγόντων. Για να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο εξετάζουμε κατά σειρά:

- ***Αν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της παράστασης που θα παραγοντοποιήσουμε.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:***

$$\Pi(x) = ax + a\psi + \alpha\omega - 2\alpha\ .$$

Λύση:

Η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi = ax + a\psi + \alpha\omega - 2\alpha = \alpha(x + \psi + \omega - 2).$$

- ***Αν η παράσταση που πρόκειται ναα παραγοντοποιηθεί είναι ταυτότητα.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:***

$$\Pi_1 = x^2 - 4a^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_2 = x^2 - 6ax + 9a^2.$$

Λύση:

Η παράσταση Π_1 γράφεται:

$$\Pi_1 = x^2 - 4a^2 = x^2 - (2a)^2 = (x - 2a)(x + 2a).$$

Όμοια, η Π_2 γράφεται:

$$\Pi_2 = x^2 - 6ax + 9a^2 = x^2 - 2.x.3a + (3a)^2 = (x - 3a)^2.$$

- ***Αν ομαδοποιώντας τους όρους της παράστασης η παράσταση παραγοντοποιείται.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:***

$$\Pi = ax - ay + \beta x - \beta y.$$

Λύση:

Η παράσταση Π ***γράφεται:***

$$\Pi = ax - ay + \beta x - \beta y = (ax - ay) + (\beta x - \beta y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi = a(x - y) + \beta(x - y) = (x - y)(a + \beta).$$

- ***Μήπως διασπώντας κάποιον όρο του πολυωνύμου σε δύο ή περισσότερους όρους μπορούμε να το παραγοντοποιήσουμε.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο:***

$$\Pi = x^3 - 12x + 16.$$

Λύση:

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι ακολουθώντας μια από τις παραπάνω μεθόδους δεν θα πετύχουμε να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση Π. ***Γι' αυτό γράφουμε:***

$$\Pi = x^3 - 12x + 16 = x^3 - 16x + 4x + 16 = \left(x^3 - 16x\right) + (4x + 16) =$$

$$= x\left(x^2 - 16\right) + 4(x + 4) = x(x - 4)(x + 4) + 4(x + 4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi = (x + 4)[x(x - 4) + 4] = (x + 4)\left(x^2 - 4x + 4\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi = (x + 4)(x - 2)^2.$$

- ***Μήπως εκτελώντας πράξεις και κάνοντας νέα ομαδοποίηση μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση μας.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο:***

$$\Pi = y(x+a) - y^2 - ax.$$

Λύση:

Καμία από τις παραπάνω μεθόδους δεν μπορεί να δώσει απάντηση στο πρόβλημα της παραγοντοποίησης του πολυωνύμου Π. ***Γι' αυτό γράφουμε:***

$$\Pi = y(x+a) - y^2 - ax = xy + ay - y^2 - ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi = (xy - ax) - \left(y^2 - ay\right) = x(y-a) - y(y-a) = (y-a)(x-y).$$

Λυμένα Παραδείγματα:

1. ***Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:***

$$\Pi_1 = 2xy - xy^2 + x^2, \quad \Pi_2 = 2x^3y^2a - 4y^3a^2x + 2a^3x^2y$$

Λύση:

Είναι: $\Pi_1 = 2xy - xy^2 + x^2 = x\left(2y - y^2 + x\right)$ ***και***

$$\Pi_2 = 2x^3y^2a - 4y^3a^2x + 2a^3x^2y = 2xya\left(x^2y - 2y^2a + a^2x\right).$$

2. ***Όμοια, τις παραστάσεις:***

$$\Pi_1 = 4x^2 + 12xy + 9y^2, \quad \Pi_2 = 2xy - y^2 - x^2,$$

$$\Pi_3 = 4x^2 - 9, \quad \Pi_4 = x^2 - 6xy + 9y^2 - 4,$$

$$\Pi_5 = 1 + 2xy - y^2 - x^2 \quad \text{και} \quad \Pi_6 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3.$$

Λύση:

Έχουμε: $\boldsymbol{\Pi_1 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2.2x.3y + (3y)^2 = (2x + 3y)^2}$,

$$\Pi_2 = 2xy - y^2 - x^2 = -\left(x^2 + y^2 - 2xy\right) = -(x - y)^2,$$

$$\Pi_3 = 4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x - 3)(2x + 3),$$

$$\Pi_4 = x^2 - 6xy + 9y^2 - 4 = (x - 3y)^2 - 2^2 = (x - 3y + 2)(x - 3y - 2)$$

$$\Pi_5 = 1 + 2xy - y^2 - x^2 = 1 - \left(x^2 + y^2 - 2xy\right) = 1 - (x - y)^2 = (1 + x - y)(1 - x + y),$$

$$\Pi_6 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = x^3 - 3x^2.2y + 3x(2y)^2 - (2y)^3 = (x - 2y)^3.$$

3. *Όμοια, τις παραστάσεις:*

$$\Pi_1 = x^3 - 4x, \qquad \Pi_2 = x^2(\alpha - \beta) - \alpha + \beta,$$

$$\Pi_3 = 1 + 8\alpha^3 \quad \kappa\alpha \quad \Pi_4 = 27\alpha^3 - 64.$$

Λύση:

Έχουμε: $\boldsymbol{\Pi_1 = x^3 - 4x = x\left(x^2 - 4\right) = x(x - 2)(x + 2)}$,

$$\Pi_2 = x^2(\alpha - \beta) - \alpha + \beta = x^2(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)\left(x^2 - 1\right) = (\alpha - \beta)(x + 1)(x - 1),$$

$$\Pi_3 = 1 + 8\alpha^3 = (2\alpha)^3 + 1^3 = (2\alpha + 1)\left[(2\alpha)^2 - 2\alpha.1 + 1^2\right] = (2\alpha + 1)\left(4\alpha^2 - 2\alpha + 1\right),$$

$$\Pi_4 = 27\alpha^3 - 64 = (3\alpha)^3 - 4^3 = (3\alpha - 4)\left[(3\alpha)^2 + 3\alpha.4 + 4^2\right] = (3\alpha - 4)\left(9\alpha^2 + 12\alpha + 16\right).$$

4. *Όμοια, τις παραστάσεις:*

$$\Pi_1 = x^2 + \alpha y + \beta x + \alpha\beta, \quad \Pi_2 = x^3 + x^2 - 4 - 4x \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_3 = \alpha\beta\left(x^2 + y^2\right) - xy\left(\alpha^2 + \beta^2\right).$$

Λύση:

Η παράσταση $\boldsymbol{\Pi_1}$ *γράφεται:*

$$\Pi_1 = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = \left(x^2 + \alpha x\right) + (\beta x + \alpha\beta) = x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) = (x + \alpha)(x + \beta).$$

Όμοια, είναι:

$$\Pi_2 = x^3 + x^2 - 4 - 4x = \left(x^3 + x^2\right) - (4x + 4) = x^2(x+1) - 4(x+1) = (x+1)\left(x^2 - 4\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi_2 = (x+1)(x-2)(x+2) \qquad \text{και}$$

$$\Pi_3 = a\beta\left(x^2 + y^2\right) - xy\left(\alpha^2 + \beta^2\right) = a\beta x^2 + a\beta y^2 - xya^2 - xy\beta^2 =$$

$$= \left(a\beta x^2 - xya^2\right) - \left(xy\beta^2 - a\beta y^2\right) = ax(\beta x - ay) - \beta y(\beta x - ay) = (\beta x - ay)(ax - \beta y).$$

5. *Όμοια, την παράσταση:* $\Pi = x^3 - 3x + 2$.

Λύση:

Η παράσταση Π *γράφεται:*

$$\Pi = x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = \left(x^3 - x\right) - (2x - 2) =$$

$$= x\left(x^2 - 1\right) - 2(x-1) = x(x-1)(x+1) - 2(x-1) =$$

$$= (x-1)[x(x+1) - 2] = (x-1)\left(x^2 + x - 2\right) = (x-1)\left(x^2 + x - 1 - 1\right) =$$

$$= (x-1)\left[\left(x^2 - 1\right) + (x-1)\right] = (x-1)[(x+1)(x-1) + (x-1)] =$$

$$= (x-1)(x-1)(x+1+1) = (x-1)^2(x+2).$$

6. *Όμοια, την παράσταση:* $\Pi = x^3(y-a) + y^3(a-x) + a^3(x-y)$.

Λύση:

Η παράσταση Π *γράφεται:*

$$\Pi = x^2(y-a) + y^2(a-x) + a^2(x-y) = x^2(y-a) + y^2a - y^2x + a^2x - a^2y =$$

$$= x^2(y-a) + \left(y^2a - a^2y\right) - \left(y^2x - a^2x\right) = x^2(y-a) + ay(y-a) - x\left(y^2 - a^2\right) =$$

$$= x^2(y-a) + ay(y-a) - x(y-a)(y+a) = (y-a)\left[x^2 + ay - x(y+a)\right] =$$

$$= (y-a)(x^2+ay-xy-ax) = (y-a)[(x^2-xy)-(ax-ay)] =$$

$$= (y-a)[x(x-y)-a(x-y)] = (y-a)(x-y)(x-a).$$

7. Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα:

$$\Pi_1 = x^2-4x+3 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_2 = 2x^2-5x+2.$$

Λύση:

Το τριώνυμο Π_1 γράφεται:

$$\Pi_1 = x^2-4x+3 = x^2-2x.2+2^2-2^2+3 = (x-2)^2-1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi_1 = (x-2-1)(x-2+1) = (x-3)(x-1)$$

ή διαφορετικά

$$\Pi_1 = x^2-4x+3 = x^2-3x-x+3 = x(x-3)-(x-3) = (x-3)(x-1).$$

Όμοια, το Π_2 γράφεται:

$$\Pi_2 = 2x^2-5x+2 = 2\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right) = 2\left[x^2-2x\frac{5}{4}+\left(\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2+1\right] =$$

$$= 2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{25}{16}+1\right] = 2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\frac{9}{16}\right] = 2\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^2-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi_2 = 2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right) = (x-2)(2x-1)$$

ή διαφορετικά

$$\Pi_2 = 2x^2-5x+2 = 2x^2-4x-x+2 = 2x(x-2)-(x-2) = (x-2)(2x-1).$$

$M.K.\varDelta$, $E.K.\varPi$ πολυωνύμων - Απλοποίηση κλασμάτων

Ορισμός: ***Ο μέγιστος κοινός διαιρέτης πολυωνύμων, που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, είναι το γινόμενο των κοινών τους παραγόντων λαμβανομένων μια φορά και με τον μικρότερο εκθέτη.***

Ορισμός: ***Το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο πολυωνύμων, που έχουν αναλυθεί σε γινόμενο πρώτων παραγόντων, είναι το γινόμενο των κοινών και των μη κοινών τους παραγόντων λαμβανομένων μια φορά και με τον μεγαλύτερο εκθέτη.***

Παράδειγμα: ***Να βρείτε τον $M.K.\varDelta$ και το $E.K.\varPi$ των:***

- $16\alpha^3\beta^2\gamma,\quad 2\alpha\beta^2\gamma^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad 4\alpha^2\beta$
- $\alpha^2-4\alpha+4,\quad \alpha^2-4 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha^3-8.$

Λύση:

Τα πολυώνυμα αναλυμένα σε γινόμενο πρώτων παραγόντων γράφονται:

- $16\alpha^3\beta^2\gamma=2^4\alpha^3\beta^2\gamma,\quad 2\alpha\beta^2\gamma^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad 4\alpha^2\beta=2^2\alpha^2\beta.$

Επομένως:

$$M.K.\varDelta\{16\alpha^3\beta^2\gamma,\ 2\alpha\beta^2\gamma^2,\ 4\alpha^2\beta\}=M.K.\varDelta\{2^4\alpha^3\beta^2\gamma,\ 2\alpha\beta^2\gamma^2,\ 2^2\alpha^2\beta\}=2\alpha\beta,$$

$$E.K.\varPi\{16\alpha^3\beta^2\gamma,\ 2\alpha\beta^2\gamma^2,\ 4\alpha^2\beta\}=E.K.\varPi\{2^4\alpha^3\beta^2\gamma,\ 2\alpha\beta^2\gamma^2,\ 2^2\alpha^2\beta\}=2^4\alpha^3\beta^2\gamma^2.$$

- $\alpha^2-4\alpha+4=(\alpha-2)^2,\quad \alpha^2-4=(\alpha-2)(\alpha+2) \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha^3-8=(\alpha-2)(\alpha^2+2\alpha+4).$

Συνεπώς: $M.K.\varDelta\{\alpha^2-4\alpha+4,\quad \alpha^2-4 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha^3-8\}=\alpha-2 \quad \kappa\alpha\iota$

$$E.K.\varPi\{\alpha^2-4\alpha+4,\quad \alpha^2-4 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha^3-8\}=(\alpha-2)^2(\alpha+2)(\alpha^2+2\alpha+4).$$

8. Δίδονται τα κλάσματα:

$$K_1 = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \quad \text{και} \quad K_2 = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 7x + 10}.$$

Να ορίσετε για ποιες τιμές του $x \in IR$ ορίζονται τα παραπάνω κλάσματα και στη συνέχεια να τα απλοποιήσετε.

Λύση:

Παραγοντοποιώντας τους όρους των παραπάνω κλασμάτων έχουμε:

$$x^2 - 5x + 6 = \cdots = (x-2)(x-3), \quad x^2 - 4 = (x-2)(x+2),$$

$$x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2, \quad x^2 - 7x + 10 = \cdots = (x-2)(x-5),$$

Το κλάσμα K_1 ορίζεται[3] όταν:

$$x^2 - 4 \neq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \neq 0 \Leftrightarrow \{x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq -2\}.$$

Για κάθε $\{x \in IR \quad \text{με} \quad x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq -2\}$ είναι:

$$K_1 = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+2)} = \frac{x-3}{x+2}.$$

Όμοια, το K_2 ορίζεται όταν: $\{x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq 5\}$.

Επομένως για κάθε $\{x \in IR \quad \text{με} \quad x \neq 2 \quad \text{και} \quad x \neq 5\}$ είναι:

$$K_2 = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 7x + 10} = \cdots = \frac{x-2}{x-5}.$$

[3] Ένα κλάσμα ορίζεται όταν ο παρανομαστής του είναι μη μηδενικός.

9. Αν οι πραγματικοί αριθμοί α και β είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3 και 4 αντίστοιχα, να βρείτε τις τιμές των κλασμάτων:

$$K_1 = \frac{\alpha}{\alpha + 3\beta}, \quad K_2 = \frac{2\alpha - \beta}{\alpha + 2\beta} \quad \text{και} \quad K_4 = \frac{3\alpha - \beta}{\beta}.$$

Λύση:

Οι αριθμοί α και β είναι ανάλογοι προς τους αριθμούς 3 και 4. Επομένως:

$$\frac{\alpha}{3} = \frac{\beta}{4} = \rho \Leftrightarrow \alpha = 3\rho \quad \text{και} \quad \beta = 4\rho, \quad \rho \in IR^*.$$

Συνεπώς:

$$K_1 = \frac{\alpha}{\alpha + 3\beta} = \frac{3\rho}{3\rho + 12\rho} = \frac{1}{5}, \quad K_2 = \frac{2\alpha - \beta}{\alpha + 2\beta} = \cdots = \frac{3}{11} \quad \text{και} \quad K_4 = \frac{3\alpha - \beta}{\beta} = \cdots = \frac{5}{4}.$$

Ασκήσεις προς λύση.

10. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

- $\Pi_1 = x^2 + 6x\psi + 9\psi^2, \quad \Pi_2 = x^4 - 2x^2\psi^2 + \psi^4$
- $\Pi_1 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8, \quad \Pi_2 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$
- $\Pi_1 = x^2 - 9\psi^2, \quad \Pi_2 = 1 - x^2, \quad \Pi_3 = 16 - 25x^2$
- $\Pi_1 = x^4 - 1, \quad \Pi_2 = 81 - 16x^4, \quad \Pi_3 = 16 - x^4$ και $\Pi_4 = x^4 - 16\psi^4.$

11. Όμοια, τις παραστάσεις:

- $\Pi_1 = \alpha x + \alpha\psi + \alpha\omega, \quad \Pi_2 = \alpha x^2 - 9\alpha\psi^2$ και $\Pi_3 = \alpha x^2 + 4\alpha x\psi + 4\psi^2 - \alpha$
- $\Pi_1 = \alpha x - 2\alpha\psi + 2\kappa x - 4\lambda\psi, \quad \Pi_2 = x + 3\psi - 4\alpha x - 12\alpha\psi, \quad \Pi_3 = x + \psi - \kappa x - \kappa\psi$
- $\Pi_1 = \kappa x^2 + 2\kappa x\psi + \kappa\psi^2, \quad \Pi_2 = \lambda x^2 - 4\lambda x + 4\lambda$ και $\Pi_3 = \alpha x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha x - \alpha$

- $\Pi_1 = x^2\alpha + \beta - \alpha - \beta x^2$, $\Pi_2 = \lambda^2\alpha + \beta\lambda + \lambda\alpha + \alpha\beta$, $\Pi_3 = 6x^2 - 3\kappa^2 x - 4\kappa^3 + 8\kappa x$
- $\Pi_1 = x^3 + x^2 + x + 1$ και $\Pi_2 = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
- $\Pi_1 = \kappa^2 + \lambda^2 + 2\kappa\lambda + 4\kappa + 4\lambda + 4$ και $\Pi_2 = \kappa^2 + 4\lambda^2 - 4\kappa\lambda + 2\kappa - 4\lambda + 1$
- $\Pi_1 = x^3 + 8$, $\Pi_2 = 8x^3 + 1$, $\Pi_3 = x^3 + 64\psi^3$
- $\Pi_1 = 64x^3 - 1$, $\Pi_2 = x^3 - 8\psi^3$, $\Pi_3 = 8x^3 - 27\psi^3$

12. Να παραγοντοποιήσετε επίσης τις παραστάσεις

- $\Pi_1 = x\psi(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(x^2 + \psi^2)$ και $\Pi_2 = x^2(\psi - \omega) + \psi^2(\omega - x) + \omega^2(x - \psi)$
- $\Pi_1 = x^2(\psi + \omega) + \psi^2(\omega + x) + \omega^2(x + \psi) + 2x\psi\omega$ και $\Pi_2 = x^3 - 3x^2 + 2$.

13. Όμοια, τις παραστάσεις:

- $\Pi_1 = (x^2 + \psi^2 - \alpha^2 - \beta^2)^2 - 4(\alpha x + \beta\psi)^2$, $\Pi_2 = x^2 - 2x\psi - 2x\omega + \psi^2 + \omega^2 + 2x\psi - 1$
- $\Pi = x^2\psi + \psi^2\omega + \omega^2 x - x\psi^2 - \psi\omega^2 - \omega x^2$
- $\Pi = \alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha)$
- $\Pi = x^3(\psi - \omega) + \psi^3(\omega - x) + \omega^3(x - \psi)$
- $\Pi = (x + \psi)^2(x - \psi) + (\psi + \omega)^2(\psi - \omega) + (\omega + x)^2(\omega - x)$
- $\Pi_1 = x^4 + 4\psi^4 - 12x^2\psi^2$ και $\Pi_2 = x^4 - \psi^4 + x\psi^9 - \psi x^9$.

14. Να βρείτε τον $M.K.\Delta$ και το $E.K.\Pi$ των πολυωνύμων:

- $3\alpha^2\beta$, $9\alpha\beta^2\gamma$ και $15\beta\gamma$
- $\alpha^2 - 1$, $\alpha^2 - \alpha$ και $\alpha^3 - \alpha^2 + \alpha - 1$.

15. *Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:*

$$K_1 = \frac{x^2 - 9\psi^2}{x - 3\psi}, \quad K_2 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}, \quad K_3 = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1} \quad \kappa\alpha\iota \quad K_4 = \frac{x^3 + \psi^3}{x^3 - \psi^3 - 2x\psi(x - \psi)}.$$

16. *Όμοια, τα κλάσματα:*

$$K_1 = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} \quad \kappa\alpha\iota \quad K_2 = \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x - 2}.$$

Για ποιες τιμές του $x \in IR$ ορίζονται τα παραπάνω κλάσματα;

17. *Να βρείτε τα εξαγόμενα:*

$$\Pi_1 = \frac{x}{(x-\psi)(x-\omega)} + \frac{\psi}{(\psi-\omega)(\psi-x)} + \frac{\omega}{(\omega-x)(\omega-\psi)}$$

$$\Pi_2 = \frac{x}{x^2 + xy + \psi^2} + \frac{1}{x^3 - \psi^3} - \frac{5}{x - \psi}.$$

18. *Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:*

$$\Pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \Pi_2 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}, \quad \Pi_3 = \frac{\alpha - 3\beta}{\alpha + 3\beta} \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_4 = \frac{3\alpha - \beta}{\beta} \quad \alpha\nu \ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \ \frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}.$$

Η διάταξη στο σύνολο IR των πραγματικών αριθμών