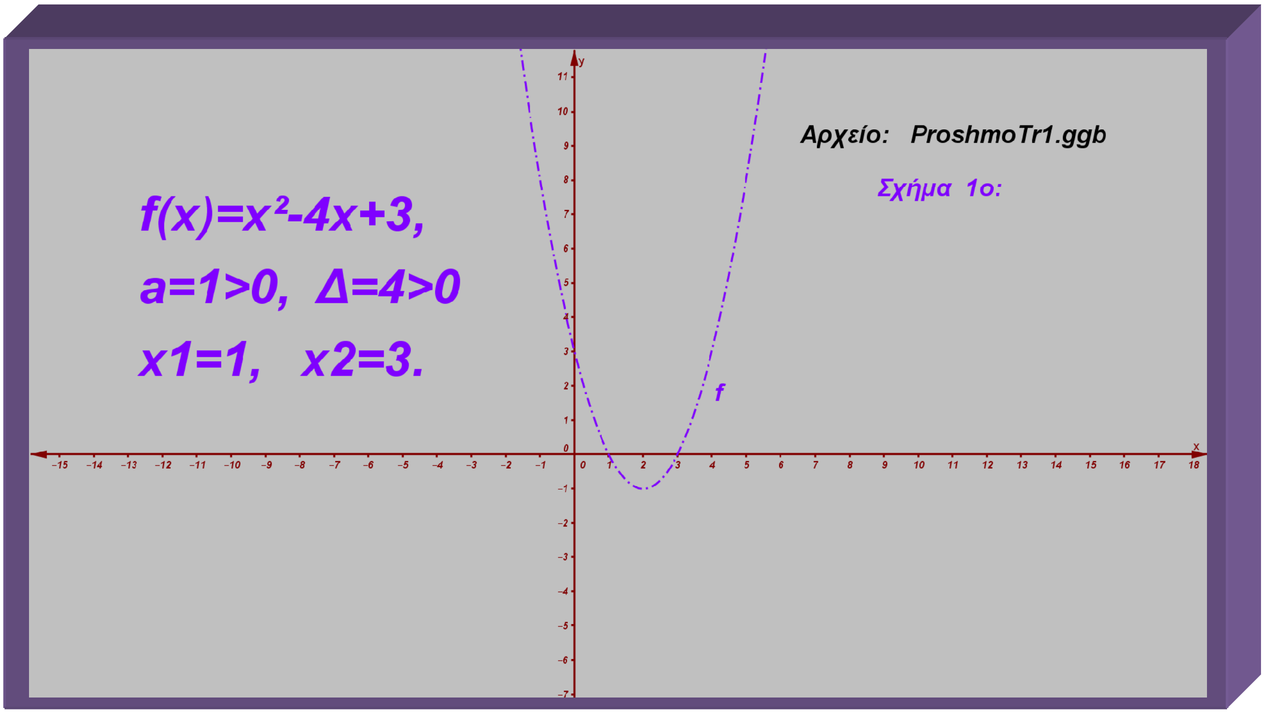
Το πρόσημο του τριωνύμου $g(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$

Από το σχήμα 1 που ακολουθεί, στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση του τριωνύμου:

$$f(x) = x^2 - 4x + 3,$$

διαπιστώνουμε ότι το τριώνυμο f:



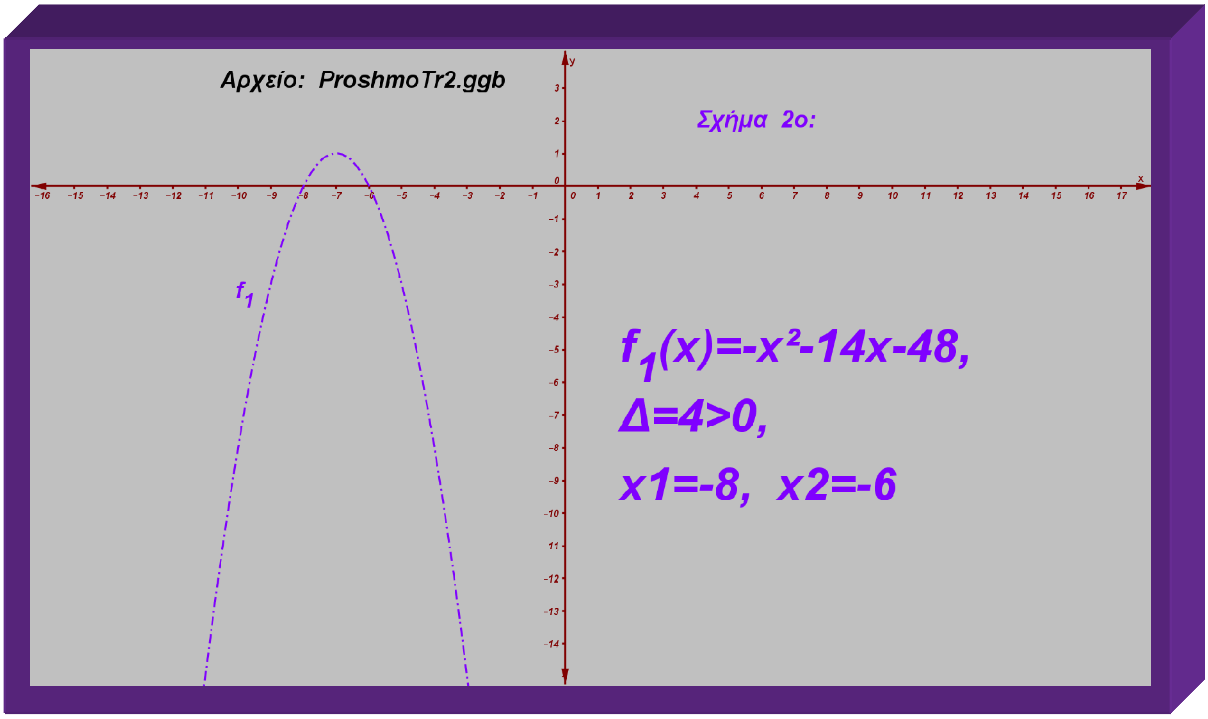
1. **Έχει ελάχιστο, αφού $\alpha = 1 > 0$.**
2. **Έχει δύο ρίζες άνισες, (άρα $\Delta > 0$), στις θέσεις των οποίων μηδενίζεται, τις:**

$$x_1 = 1 \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = 3.$$

3. **Είναι αρνητικό όταν $x \in (x_1, \ x_2) \Leftrightarrow x \in (1, \ 3)$ ενώ**
4. **Είναι θετικό όταν $x < 1$ ή $x > 3 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \ 1) \cup (3, +\infty)$.**

Στο παρακάτω σχήμα 2 που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση του τριωνύμου:

$$f_1(x) = -x^2 - 14x - 48.$$



Από το γράφημα αυτό διαπιστώνουμε ότι το τριώνυμο f_1:

1. ***Έχει μέγιστο, αφού*** $\alpha = -1 < 0$.
2. ***Έχει δύο ρίζες άνισες, (άρα*** $\Delta > 0$ ***), στις θέσεις των 1οποίων μηδενίζεται, τις:***

$$x_1 = -8 \quad \kappa\alpha\iota \quad x_2 = -6.$$

3. ***Είναι θετικό όταν*** $x \in (x_1,\ x_2) \Leftrightarrow x \in (-8,\ -6)$, ***ενώ***
4. ***Είναι αρνητικό όταν*** $x < -8$ ***ή*** $x > -6 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -8) \cup (-6, +\infty)$.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 1ο: Αν $\Delta > 0$, το τριώνυμο:

$$g(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες έστω τις: x_1, x_2 με $x_1 < x_2$, και:

- **Μηδενίζεται στις θέσεις των ριζών του x_1 και x_2 δηλαδή:**

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \quad ή \quad x = x_2.$$

- **Είναι ομόσημο του α για τιμές του x εκτός του διαστήματος των ριζών του, δηλαδή για τιμές του x μικρότερες της μικρότερης ρίζας του ή μεγαλύτερες από την μεγαλύτερη ρίζα του. Δηλαδή:**

$$\alpha g(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1 \quad ή \quad x > x_2.$$

- **Ετερόσημο του α για τιμές του x μεταξύ του διαστήματος των ριζών του, δηλαδή:**

$$\alpha g(x) < 0 \Leftrightarrow x_1 < x < x_2.$$

Απόδειξη:

Έστω $\Delta > 0$ και x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ οι ρίζες του τριωνύμου

$$g(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0.$$

Είναι τότε: $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1$ **ή** $x = x_2$ **και** $g(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Επομένως:

- **Αν** $x < x_1$ **ή** $x > x_2 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) > 0 \Rightarrow$

$$\alpha^2(x - x_1)(x < x_2) > 0 \Rightarrow a.\{a(x - x_1)(x - x_2)\} > 0 \Rightarrow ag(x) > 0.$$

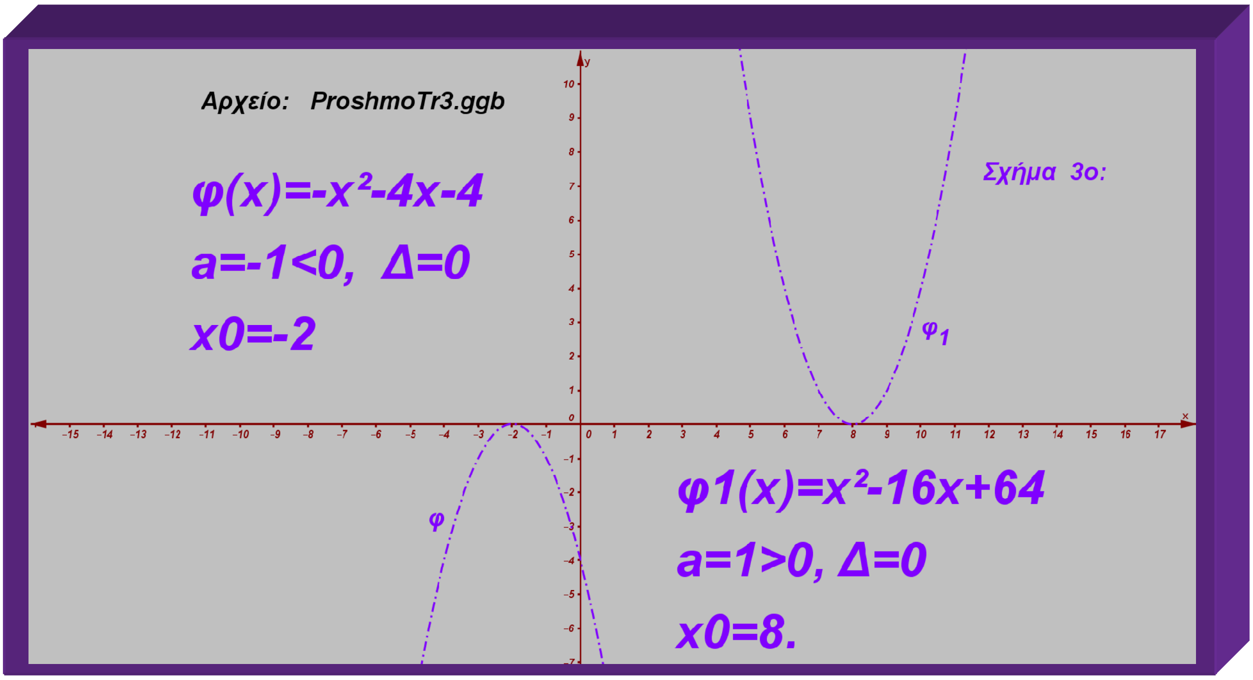
- **Αν** $x_1 < x < x_2 \Rightarrow (x - x_1)(x - x_2) < 0 \Rightarrow \alpha^2(x - x_1)(x - x_2) < 0 \Rightarrow$

$$\boldsymbol{a}.\{\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_1})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x_2})\} < 0 \Rightarrow ag(\boldsymbol{x}) < 0.$$

Στο σχήμα 3 που ακολουθεί, φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των τριωνύμων:

$$\boldsymbol{\varphi(x) = -x^2 - 4x - 4 \quad \kappa\alpha\iota \quad \varphi_1(x) = x^2 - 16x + 64.}$$

από τις οποίες με παρόμοιους συλλογισμούς εξάγουμε το ακόλουθο:



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 2ο: Αν $\boldsymbol{\Delta = 0}$, το τριώνυμο:

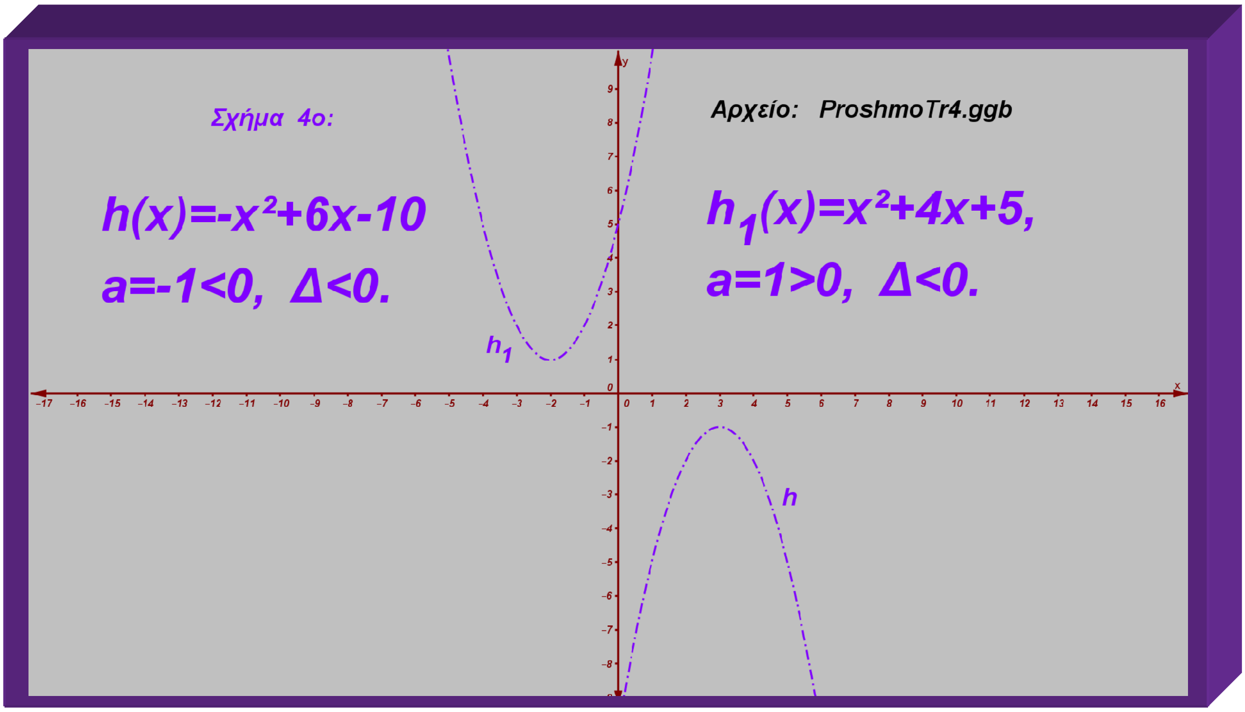
$$\boldsymbol{g(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0}$$

- *Μηδενίζεται στη θέση $\boldsymbol{x_0}$, της διπλής του ρίζας, δηλαδή:*

$$\boldsymbol{g(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} \quad \kappa\alpha\iota}$$

- *Είναι ομόσημο του $\boldsymbol{\alpha}$ για κάθε $\boldsymbol{x \neq x_0}$.*

Όμοια, με βάση το παρακάτω σχήμα 8 εξάγουμε το ακόλουθο:



ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ 3ο: ***Αν*** $\Delta < 0$, ***το τριώνυμο:***

$$\boldsymbol{g(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0}$$

είναι ομόσημο του α ***για κάθε*** $x \in IR$, ***δηλαδή:***

$$\alpha g(x) > 0 \quad \text{για κάθε} \quad x \in IR.$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε επίσης ότι το τριώνυμο $g(x)$ ***διατηρεί πρόσημο, το πρόσημο του*** α.

Εφαρμογή: ***Να βρείτε τα πρόσημα των παρακάτω τριωνύμων:***

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 5, \quad f_1(x) = -7x^2 + 4x + 20$$

$$\varphi(x) = -x^2 + 10x - 25, \quad \varphi_1(x) = 9x^2 + 6x + 1 \quad \text{και}$$

$$h(x) = 3x^2 - x + 1, \quad h_1(x) = -2x^2 + x - 1.$$

Λύση:

1. *Για το τριώνυμο* f *είναι:*

$$\alpha = 2 > 0, \quad \Delta = \cdots = 49 > 0, \quad x_1 = -\frac{5}{2}, \quad x_2 = 1.$$

Επομένως το πρόσημο του έχει ως ακολούθως:

x	$-\infty$		$x_1 = -\frac{5}{2}$		$x_2 = 1$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. *Όμοια, για το τριώνυμο* f_1 *είναι:*

$$\alpha = -7 < 0, \quad \Delta = \cdots = 576 > 0, \quad x_1 = -\frac{10}{7}, \quad x_2 = 2$$

και συνεπώς:

x	$-\infty$		$x_1 = -\frac{10}{7}$		$x_2 = 2$		$+\infty$
$f_1(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

3. *Για το τριώνυμο* φ *είναι:*

$$\alpha = -1 < 0, \quad \Delta = \cdots = 0, \quad x_0 = 5, \quad \textit{και}$$

συνεπώς το πρόσημο του είναι:

x	$-\infty$	$x_0 = 5$	$+\infty$
$\varphi(x)$	$-$	0	$-$

4. Αντίστοιχα, για το τριώνυμο φ_1 είναι:

$$\alpha = 9 > 0, \quad \Delta = \cdots = 0, \quad x_0 = -\frac{1}{3}, \quad \kappa\alpha\iota$$

x	$-\infty$	$x_0 = -\frac{1}{3}$	$+\infty$
$\varphi_1(x)$	$+$	0	$+$

5. Για το τριώνυμο h έχουμε:

$$\alpha = 3 > 0, \quad \Delta = \cdots = -11 < 0, \quad \kappa\alpha\iota \quad \varepsilon\pi o\mu\acute{\varepsilon}\nu\omega\varsigma:$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$h(x)$	$+$	

6. Όμοια, για το τριώνυμο h_1 είναι: $\alpha = -2 < 0, \ \Delta = \cdots = -7 < 0.$ **Άρα:**

x	$-\infty$	$+\infty$
$h_1(x)$	$-$	