Η Έννοια της Πραγματικής Συνάρτησης Πραγματικής μεταβλητής

Ο ρ ι σ μ ό ς: Έστω D ένα μη κενό υποσύνολο του IR. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, με πεδίο ορισμού το σύνολο D και τιμές στο IR, μια διαδικασία, «δηλαδή ένα κανόνα f», με την οποία σε κάθε στοιχείο $x \in D$ αντιστοιχίζεται ένα και μόνον ένα στοιχείο $y \in IR$, που ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με: $y = f(x)$.

Συμβολικά γράφουμε: $f \ : \ D \to IR$ ή $D \ni x \overset{f}{\overbrace{->}} y = f(x) \in IR$.

Το $f(x)$ λέγεται τύπος της συνάρτησης, ενώ η εξίσωση $y = f(x)$ λέγεται εξίσωση της f.

Σε μια συνάρτηση με εξίσωση $y = f(x)$ το x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του D, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης f στο x, ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Ο τύπος μιας συνάρτησης δεν είναι υποχρεωτικό ότι θα δίδεται με τη μορφή μιας αλγεβρικής παράστασης. Μια συνάρτηση δηλαδή μπορεί να έχει πολλαπλό τύπο, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f \quad με \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις τιμές της συνάρτησης f σε όλα τα $x \in D$, ονομάζεται σύνολο τιμών της f και το συμβολίζουμε με R_f ή $f(D)$.

Δηλαδή: $R_f = \{\, y \in IR \ : \ υπάρχει \ \ x \in D \ \ με \ \ y = f(x)\}$

Λέμε επίσης ότι μια συνάρτηση $f \ : \ D \to IR$ είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο E, όταν το E είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, δηλαδή: $E \subseteq D$. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο τιμών της f συμβολίζεται με $f(E)$ και είναι:

$$f(E) = \{y \in IR \ : \ \ \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota \ \ x \in E \ \ \ \mu\varepsilon \ \ \ y = f(x)\} \subseteq R_f.$$

Το στοιχείο $x_0 \in D_f$ θα ονομάζεται σταθερό ή αμετάβλητο στοιχείο μέσω της f αν, και μόνον αν είναι: $f(x_0) = x_0$.

Τ ο ν ί ζ ε τ α ι ότι από το σημείο αυτό και μετά θα αναφερόμαστε σε συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων του IR.

Γράφημα Συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f \ : \ D \to IR$. Το σύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη $(x, \ f(x))$ όπου $x \in D$ λέγεται γράφημα της f και συμβολίζεται με G_f.

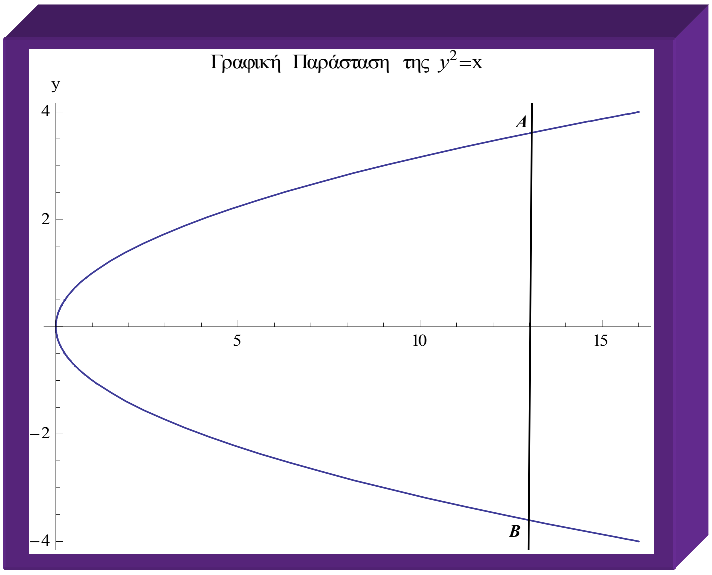
Είναι δηλαδή: $G_f = \{ \ (x, \ f(x)) \ \ \ \mu\varepsilon \ \ x \in D \ \}$.

Η γεωμετρική παράσταση του γραφήματος G_f μιας συνάρτησης f στο καρτεσιανό επίπεδο, είναι η γραφική της παράσταση. Σημειώνεται ότι δεν είναι πάντοτε εφικτή η κατασκευή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με την :

$$f \ \ \ \mu\varepsilon \ \ \ f(x) = \begin{Bmatrix} 1 & \alpha\nu & x \in Q \\ & & \\ 0 & \alpha\nu & x \in IR - Q \end{Bmatrix} \ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta \ \ Dirichlet$$

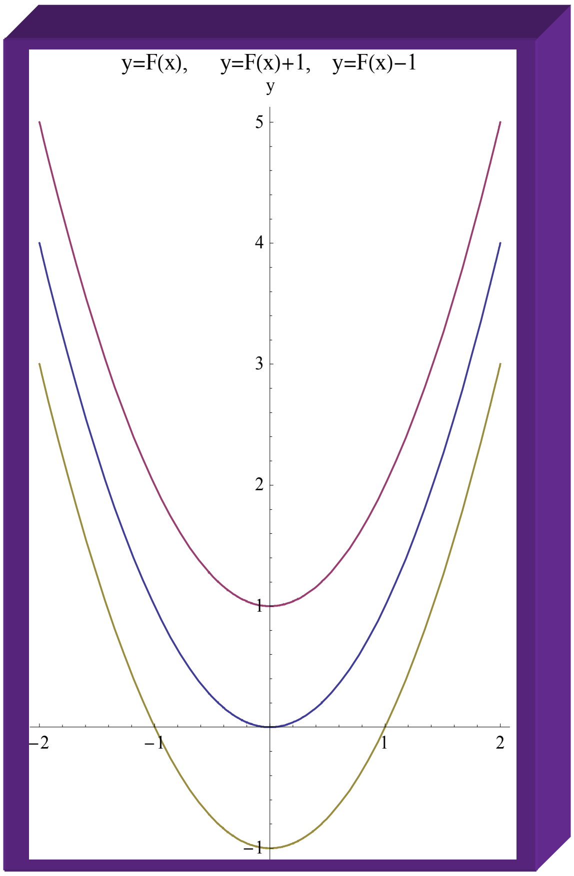
Από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει ότι δεν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τετμημένη. Άρα μια καμπύλη γραμμή στο καρτεσιανό επίπεδο είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, αν κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y΄y$ τέμνει την καμπύλη αυτή το πολύ σ' ένα σημείο.

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων



Η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος δ ε ν είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, αφού υπάρχει για παράδειγμα η ευθεία $AB \parallel y'y$ που τέμνει το γράφημα σε δύο σημεία.

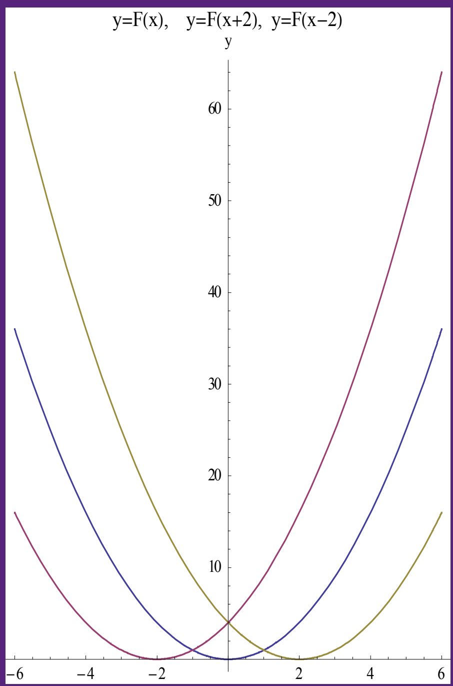
Γραφική Παράσταση των Συναρτήσεων $y = F(x)$ και $y = F(x) + c,\ \ c \in IR^*$.



- $y = F(x)$
- $y = F(x) + 1$
- $y = F(x) - 1$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = F(x) + c,\ \ c \in IR^*$ είναι μια παράλληλη μετατόπιση, κατά τη διεύθυνση του άξονα $y'y$, της γραφικής παράστασης της F.

Γραφική Παράσταση των Συναρτήσεων: $y = F(x)$, $y = F(x + c)$, $c \in IR^*$



- $y = F(x)$
- $y = F(x + 2)$
- $y = F(x - 2)$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = F(x + c)$ είναι μια παράλληλη μετατόπιση, κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της F.

Η μετατόπιση αυτή είναι προς τα αριστερά εάν $c > 0$ και προς τα δεξιά εάν $c < 0$.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς:

Η αντιστοιχία $f : D_f \to IR$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο D_f, αν και μόνον αν:

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in D_f \quad \text{με} \quad x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

ή ισοδύναμα: για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Αν για μια συνάρτηση με τύπο $f(x)$ δεν δίδεται το πεδίο ορισμού της, τότε αυτό ορίζεται ως το ευρύτερο υποσύνολο του IR για το οποίο έχει έννοια πραγματικού αριθμού το $f(x)$. Δηλαδή:

$$D_f = \{x \in IR \ : \ f(x) \in IR\} \subseteq IR.$$

Όταν δίδεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : D_f \to IR$ τότε:

1. *Το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της G_f.*

2. *Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της G_f.*

3. *Η τιμή της f στο σημείο $x_0 \in D_f$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της G_f.*

4. *Το σημείο $P(x_0, y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν, και μόνον αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της.*

5. *Η τομή της γραφικής παράστασης συνάρτησης f και του άξονα $x'x$ βρίσκεται από τη λύση του συστήματος: $\{y = f(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad y = 0 \quad \mu\varepsilon \quad x \in D_f\}$. Αντίστοιχα, η τομή της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $y'y$ βρίσκεται από τη λύση του συστήματος:*

$$\{\, y = f(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad x = 0 \quad \varepsilon\varphi\acute{o}\sigma o\nu \;\; 0 \in D_f \,\}.$$

Το σημείο τομής είναι $\tau\acute{o}\tau\varepsilon\ \tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$ $P(0, f(0))$.

Η τομή των γραφικών παραστάσεων G_f, G_φ δύο συναρτήσεων f $\kappa\alpha\iota$ φ προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος:

$$\{y = f(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad y = \varphi(x) \quad \mu\varepsilon \quad x \in D_f \cap D_\varphi\}.$$

6. *Η γραφική παράσταση συνάρτησης $f: \ D_f \to IR$ βρίσκεται εξ' ολοκλήρου πάνω από τον άξονα $x'x$, αν και μόνον αν είναι: $f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f$.*

   Αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της $f: \ D_f \to IR$ βρίσκεται εξ' ολοκλήρου κάτω από τον άξονα $\mathrm{x'x}$, αν και μόνον αν είναι: $f(x) < 0 \quad \forall x \in D_f$.

7. *Η γραφική παράσταση συνάρτησης φ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση συνάρτησης φ, αν και μόνον αν είναι: $f(x) > \varphi(x) \quad \mu\varepsilon \quad x \in D_f \cap D_\varphi$.*

   Αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της φ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της φ, αν και μόνον αν είναι: $f(x) < \varphi(x) \quad \mu\varepsilon \quad x \in D_f \cap D_\varphi$.

Μονοτονία Συνάρτησης

Θεωρούμε συνάρτηση $f \ : \ D_f \to IR$ και το μη κενό διάστημα D του πεδίου ορισμού της $D_f \subseteq IR$.

Ο ρ ι σ μ ό ς: Θα λέμε ότι η συνάρτηση φ είναι γ ν η σ ί ω ς αύξουσα στο D, όταν:

$$\gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x_1, x_2 \in D \quad \mu\varepsilon \quad x_1 < x_2 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση φ θα λέγεται γ ν η σ ί ω ς φθίνουσα στο D, όταν:

$$\gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x_1, x_2 \in D \quad \mu\varepsilon \quad x_1 < x_2 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Η συνάρτηση f θα ονομάζεται γνησίως μονότονη στο διάστημα D του πεδίου ορισμού της, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' αυτό.

Ο ρ ι σ μ ό ς: Θα λέμε ότι η συνάρτηση f είναι α ύ ξ ο υ σ α στο D, όταν:

$$\gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x_1, x_2 \in D \quad \mu\varepsilon \quad x_1 < x_2 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση f θα λέγεται φ θ ί ν ο υ σ α στο D, όταν:

$$\gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x_1, x_2 \in D \quad \mu\varepsilon \quad x_1 < x_2 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Η συνάρτηση f θα ονομάζεται μονότονη στο διάστημα D του πεδίου ορισμού της, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα σ' αυτό.

Παράδειγμα 1ο:

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} 2x-3, & \alpha\nu \quad x \leq 0 \\ x-3, & \alpha\nu \quad x > 0 \end{cases}$ είναι γνησίως αύξουσα.

Λ ύ σ η:

Αν $x_1 < x_2 \leq 0$ τότε:

$$2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (1).$$

Αν $0 < x_1 < x_2$ *τότε:*

$$x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (2).$$

Τέλος αν $x_1 \leq 0 < x_2$ *θα είναι:*

$$\begin{Bmatrix} 2x_1 - 3 \leq -3 \\ \kappa\alpha\iota \\ x_2 - 3 > -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f(x_1) \leq -3 \\ \kappa\alpha\iota \\ f(x_2) > -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (3).$$

Από τις (1), (2) $\kappa\alpha\iota$ (3) *προκύπτει ότι η συνάρτηση* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* IR.

Παράδειγμα 2ο: Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση

$$f \quad \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o \quad f(x) = \frac{x-4}{x-5}.$$

Η f *ορίζεται στο σύνολο* $D_f = IR - \{5\} = (-\infty,\ 5) \cup (5, +\infty)$.

Μελέτη της μονοτονίας της f *< Συνθετικά >*

Για κάθε $x \neq 5$ *είναι:*

$$f(x) = \frac{x-4}{x-5} = \frac{x-5+1}{x-5} = 1 + \frac{1}{x-5} \quad (1).$$

Αν $x_1 < x_2 < 5$ *τότε:*

$$x_1 - 5 < x_2 - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1-5} > \frac{1}{x_2-5} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_1-5} > 1 + \frac{1}{x_2-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (2).$$

Επομένως η f *είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα* $(-\infty,\ 5)$.

Αν $5 < x_1 < x_2$ *τότε:*

$$0 < x_1 - 5 < x_2 - 5 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 5} > \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_1 - 5} > 1 + \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (3).$$

Άρα η f *είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα* $(5, +\infty)$.

Τέλος αν $x_1 < 5 < x_2$ *θα είναι:*

$$x_1 - 5 < 0 < x_2 - 5 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 5} < 0 < \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_1 - 5} < 1 < 1 + \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow$$

$$f(x_1) < 1 < f(x_2) \quad (4).$$

Από τις (2), (3) $\kappa\alpha\iota$ (4) *συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση* f *είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα* $(-\infty,\ 5)$ $\kappa\alpha\iota$ $(5, +\infty)$, *χωρίς όμως να είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωση τους, δηλαδή στο πεδίο ορισμού της* $D_f = IR - \{5\}$.

Ολικά Ακρότατα Συνάρτησης

Θεωρούμε συνάρτηση $f \ : \ D_f \rightarrow IR, \quad D_f \subseteq IR.$.

Ο ρ ι σ μ ό ς: Λέμε ότι η συνάρτηση f *παρουσιάζει στο σημείο* $x_0 \in D_f$ *ολικό μέγιστο ή απλούστερα μέγιστο ίσο με* $f(x_0)$, *αν και μόνον αν είναι:*

$$f(x) \leq f(x_0), \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in D_f.$$

Ο ρ ι σ μ ό ς: Λέμε ότι η συνάρτηση f *παρουσιάζει στο σημείο* $x_0 \in D_f$ *ολικό ελάχιστο ή απλούστερα ελάχιστο ίσο με* $f(x_0)$, *αν και μόνον αν είναι:*

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in D_f.$$

Το ολικό μέγιστο ή το ολικό ελάχιστο συνάρτησης f ονομάζονται ολικά ακρότατα ή απλούστερα ακρότατα αυτής.

Παράδειγμα 3ο: Δείξετε ότι η συνάρτηση f $\mu\varepsilon$ $f(x) = |x-1|$ παρουσιάζει ελάχιστο.

Λ ύ σ η:

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = IR$ και:

$f(x) = |x-1| \geq 0$ $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in IR$ (1).

Είναι όμως: $f(1) = 0$ (2).

Έτσι, η σχέση (1) γράφεται:

$f(x) \geq f(1) = 0$ $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in IR$ (3).

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο,

$f_{Min}(x) = 0$, $\sigma\tau\eta\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta$ $x_0 = 1$.

Όταν για μια συνάρτηση f είναι: $f(x) \geq E$ για κάθε $x \in D_f$, τότε ο αριθμός E είναι ολικό ελάχιστο της f, μ ό ν ο ν εφόσον το E αποτελεί τιμή της.

Δηλαδή, $f_{min}(x) = E$, αν:

$f(x) \geq E$ $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x \in D_f$ και

υπάρχει $x_0 \in D_f$: $f(x_0) = E$.

Οι συναρτήσεις

$$\varphi(x) = ax + \beta, \quad f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma, \quad \alpha, \beta, \gamma \in IR \quad \kappa\alpha\iota\ \ g(x) = |x|.$$

- Η γραμμική συνάρτηση $\varphi(x) = ax + \beta$, $\alpha, \beta \in IR$.

Α. Μονοτονία της φ

Η συνάρτηση φ ορίζεται σ' όλο το IR και:

$\Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $x_1,\ x_2 \in IR$ $\mu\varepsilon$ $x_1 < x_2$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$:

1. Αν $\alpha > 0$ τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \alpha x_1 < \alpha x_2 \Rightarrow \alpha x_1 + \beta < \alpha x_2 + \beta \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

   Επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

2. Αντίστοιχα, αν $\alpha < 0$ τότε η φ είναι γνησίως φθίνουσα στο IR

3. Τέλος, αν $\alpha = 0$ η συνάρτηση φ είναι σταθερή.

Β. Γραφική παράσταση της φ

Είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ είναι ευθεία γραμμή που τέμνει:

1. Τον άξονα $\chi΄\chi$ στο σημείο $A\left(-\frac{\beta}{\alpha},\ 0\right)$ και

2. Τον άξονα $\psi΄\psi$ στο σημείο $B(0,\ \beta)$

Το α ονομάζεται συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας αυτής και ισούται με την εφαπτομένη της γωνίας που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα $x΄x$ όταν διαγράφεται κατά την θετική φορά.

Ειδικότερα, αν $\beta = 0$, $(\pi o\sigma\acute{\alpha}\ \ y,\ x\ \ \alpha\nu\acute{\alpha}\lambda o\gamma\alpha\,)$, η ευθεία $y = \alpha x$ είναι ευθεία που διέρχεται από την αρχή O του συστήματος συντεταγμένων.

Τέλος, αν $\alpha = 0$ η συνάρτηση φ είναι σταθερή με τύπο: $y = \beta$ και η γραφική της παράσταση είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα $x΄x$ από το σημείο $\Sigma(0, \beta)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Για να βρούμε το συντελεστή διεύθυνσης ευθείας της οποίας η εξίσωση δίδεται με τη μορφή:

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0,\quad \alpha, \beta, \gamma \in IR,\quad |\alpha| + |\beta| \neq 0$$ [1]

1. Αν $\beta \neq 0$ λύνουμε την παραπάνω εξίσωση ως προς y και τότε ο συντελεστής του x στο δεύτερο μέλος είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας.

[1] Η σχέση $|\alpha| + |\beta| \neq 0$ σημαίνει: Ένας τουλάχιστον από τους α, β είναι διάφορος του μηδενός.

2. Αν $\beta = 0$ τότε δ ε ν ορίζεται συντελεστής διεύθυνσης για την ευθεία. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία παίρνει την μορφή: $x = x_0 \in IR$, που είναι ευθεία παράλληλη στον άξονα $\psi΄\psi$ από το σημείο $P(x_0,\ 0)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4ο: Έστω η συνάρτηση $y = \varphi(x) = \sqrt{3}x - 2$.

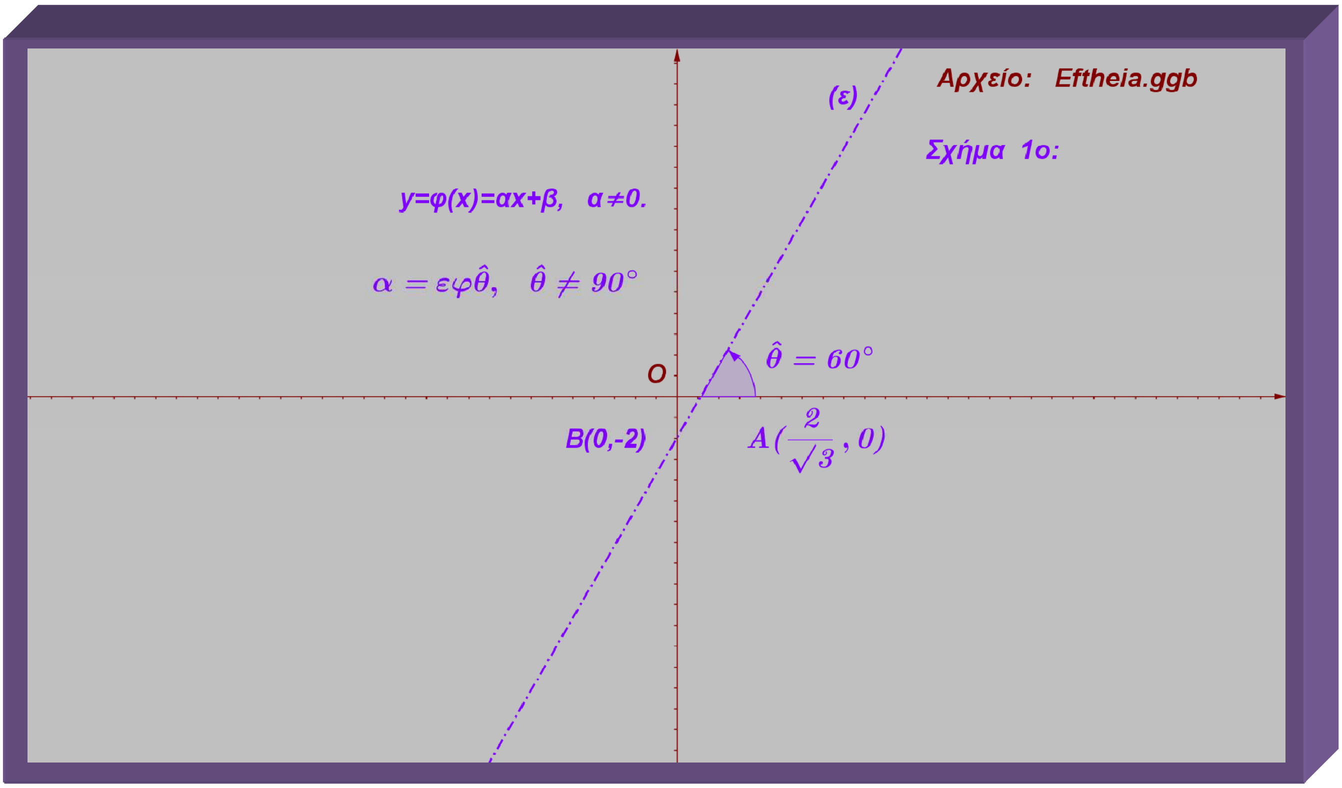
Η συνάρτηση αυτή παριστάνει ευθεία (ε) που τέμνει τον άξονα $x΄x$ στο σημείο $A\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$ και τον άξονα $\psi΄\psi$ στο σημείο $B(0, -2)$.

Είναι $\alpha = \sqrt{3} > 0$ και επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα.

Η ευθεία αυτή έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon = \sqrt{3}$.

Έτσι, αν θ είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x΄x$ τότε:

$$\lambda = \varepsilon\varphi\,\hat{\theta} \Rightarrow \varepsilon\varphi\,\hat{\theta} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{\theta} = 60°.$$



C. Μονοτονία της f.

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού όλο το $IR = \left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right] \cup \left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$ και για κάθε $x \in IR$ είναι:

$$f(x) = \alpha\left\{\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right\} = \alpha\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} \qquad (1).$$

Επομένως:

1. Αν $\alpha > 0$

$$x_1 < x_2 \leq -\frac{\beta}{2\alpha} \Rightarrow x_1 + \frac{\beta}{2\alpha} < x_2 + \frac{\beta}{2\alpha} \leq 0 \Rightarrow \left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 > \left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 > \alpha\left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha\left(x_1 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} > \alpha\left(x_2 + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha} \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Δηλαδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα: $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$.

Όμοια, η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα: $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

2. Αν $\alpha < 0$ τότε:

Με παρόμοιους συλλογισμούς διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f είναι:

Γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left(-\infty, -\frac{\beta}{2\alpha}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα: $\left[-\frac{\beta}{2\alpha}, +\infty\right)$.

D. Ακρότατα της f.

Είναι:

$$f(x)=\alpha\left\{\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2-4\alpha\gamma}{4\alpha^2}\right\}=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha} \qquad (1).$$

Επομένως:

1. **Αν** $\alpha>0$

$$\text{Για κάθε } x\in IR \text{ είναι: } \left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\geq 0 \overset{\alpha>0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2\geq 0\Rightarrow \alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\Delta}{4\alpha}\geq-\frac{\Delta}{4\alpha}\Rightarrow f(x)\geq-\frac{\Delta}{4\alpha},$$

$$\text{Δηλαδή: } f(x)\geq-\frac{\Delta}{4\alpha}, \quad \text{για κάθε } x\in IR \qquad (2).$$

Η ισότητα στην (2) ισχύει όταν: $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

Συνεπώς η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο, ίσο με $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ και γράφουμε:

$$f_{min}(x)=-\frac{\Delta}{4\alpha}, \quad \text{για } x=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

2. **Αν** $\alpha<0$ **με αντίστοιχους συλλογισμούς διαπιστώνουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μέγιστο, ίσο με $-\frac{\Delta}{4\alpha}$ για $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$ και γράφουμε:**

$$f_{max}(x)=-\frac{\Delta}{4\alpha}, \quad \text{για } x=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Ε. Γραφική Παράσταση της $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma,\quad \alpha,\beta,\gamma\in IR,\quad \alpha\neq 0.$

Η γραμμή τα σημεία της οποίας αποτελούν το γράφημα της συνάρτησης αυτής ονομάζεται παραβολή.

Η παραβολή τέμνει τον άξονα $x΄x$:

- *σε δύο σημεία, αν $\Delta>0$, με συντεταγμένες $A(x_1,0)$ $\kappa\alpha\iota$ $B(x_2,0)$ όπου x_1 $\kappa\alpha\iota$ x_2 οι ρίζες του τριωνύμου f.*
- *Στο σημείο $A(x_0,0)$, $\alpha\nu$ $\Delta=0$, όπου x_0 η διπλή ρίζα του τριωνύμου f, ενώ:*
- *Δεν τέμνει τον άξονα $x΄x$, $\alpha\nu$ $\Delta<0$.*

Η παραβολή τέμνει τον άξονα $\psi΄\psi$ στο σημείο $\Gamma(0,\ \gamma)$.

Το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha},\ -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ λέγεται κορυφή της παραβολής και είναι:

- *Κορυφή μεγίστου αν $\alpha<0$ ή*
- *Κορυφή ελαχίστου, αν $\alpha>0$.*

Άξονας συμμετρίας της παραβολής $f(x)=ax^2+\beta x+\gamma,\ \alpha,\beta,\gamma\in IR,\ \alpha\neq 0$ είναι η ευθεία (ε) με εξίσωση: $x=-\frac{\beta}{2\alpha}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5ο: *Να μελετήσετε και να κατασκευάσετε το γράφημα των συναρτήσεων:*

$$f(x)=x^2+6x+8,\quad \varphi(x)=-x^2+6x-9\quad \kappa\alpha\iota\quad h(x)=x^2+1.$$

Λύση:

1. Για το τριώνυμο f είναι:

$$\alpha=1,\ \beta=6,\ \gamma=8,\ \Delta=\dots=4>0,\ x_1=\dots=-4,\ x_2=\dots=-2.$$

Είναι δε: $-\frac{\beta}{2\alpha}=-3$ $\kappa\alpha\iota$ $-\frac{\Delta}{4\alpha}=-1.$

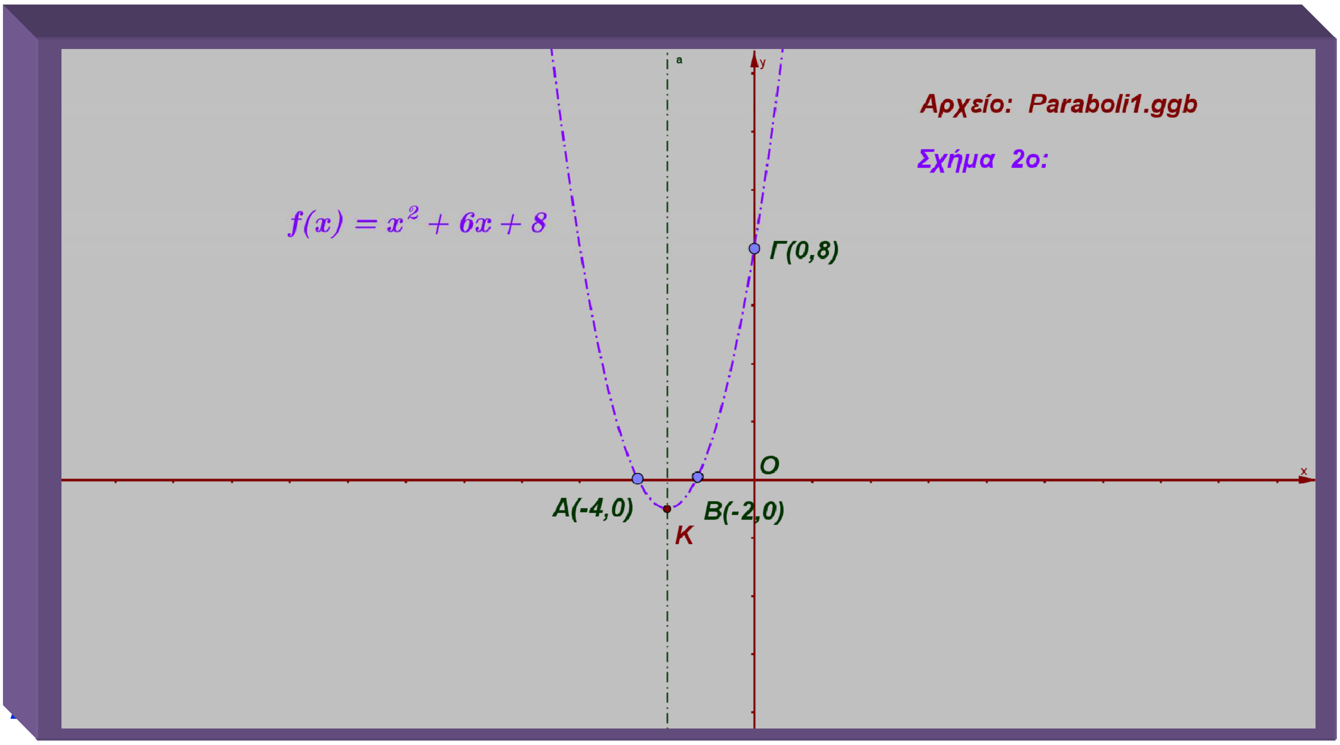
Επομένως τέμνει τον άξονα $x΄x$ $\sigma\tau\alpha\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}\alpha$: $A(-4,0)$, $B(-2,0)$ και τον άξονα $\psi΄\psi$ $\sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$ $\Gamma(0,\ 8)$.

Η παραβολή f έχει κορυφή το σημείο: $K(-3,\ -1\ )$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία (ε) με εξίσωση: $x=-3$.

Είναι $\alpha = 1 > 0$ και επομένως η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα: $(-\infty, -3\,]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα: $[-3, +\infty)$, ενώ έχει ελάχιστο:

$$f_{min}(x) = -1, \quad \gamma\iota\alpha \quad x = -3.$$

Η γραφική παράσταση του τριωνύμου f φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:



$$\alpha = -1,\ \ \beta = 6,\ \ \gamma = -9,\ \ \Delta = \cdots = 0,\ \ x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = 3 \quad \kappa\alpha\iota \quad -\frac{\Delta}{4\alpha} = 0..$$

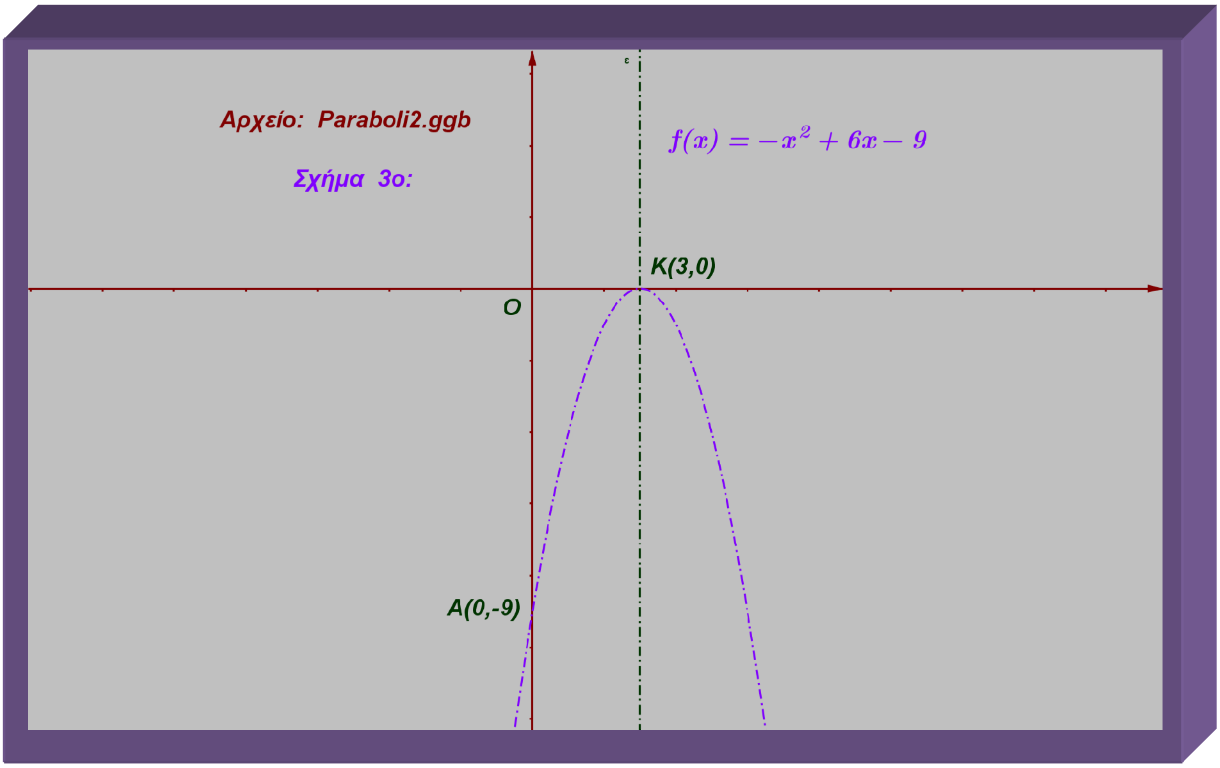
Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φ τέμνει τον άξονα $x\'x$ στο σημείο: $K(3,0)$ και τον άξονα $\psi\'\psi$ $\sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$ $A(0,-9)$.

Η παραβολή φ έχει κορυφή το σημείο: $K(3,\ 0\ )$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία (ε) με εξίσωση: $x = 3$.

Είναι $\alpha = -1 < 0$ και επομένως η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα: $(-\infty, 3\,]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα: $[3, +\infty)$, ενώ έχει μέγιστο:

$$\varphi_{max}(x) = 0, \quad \gamma\iota\alpha \quad x = 3.$$

Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση του τριωνύμου φ.



3. Το τριώνυμο h *έχει:*

$$\alpha = 1, \;\; \beta = 0, \;\; \gamma = 1, \;\; \Delta = \cdots = -4 < 0, \quad -\frac{\beta}{2\alpha} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad -\frac{\Delta}{4\alpha} = 1.$$

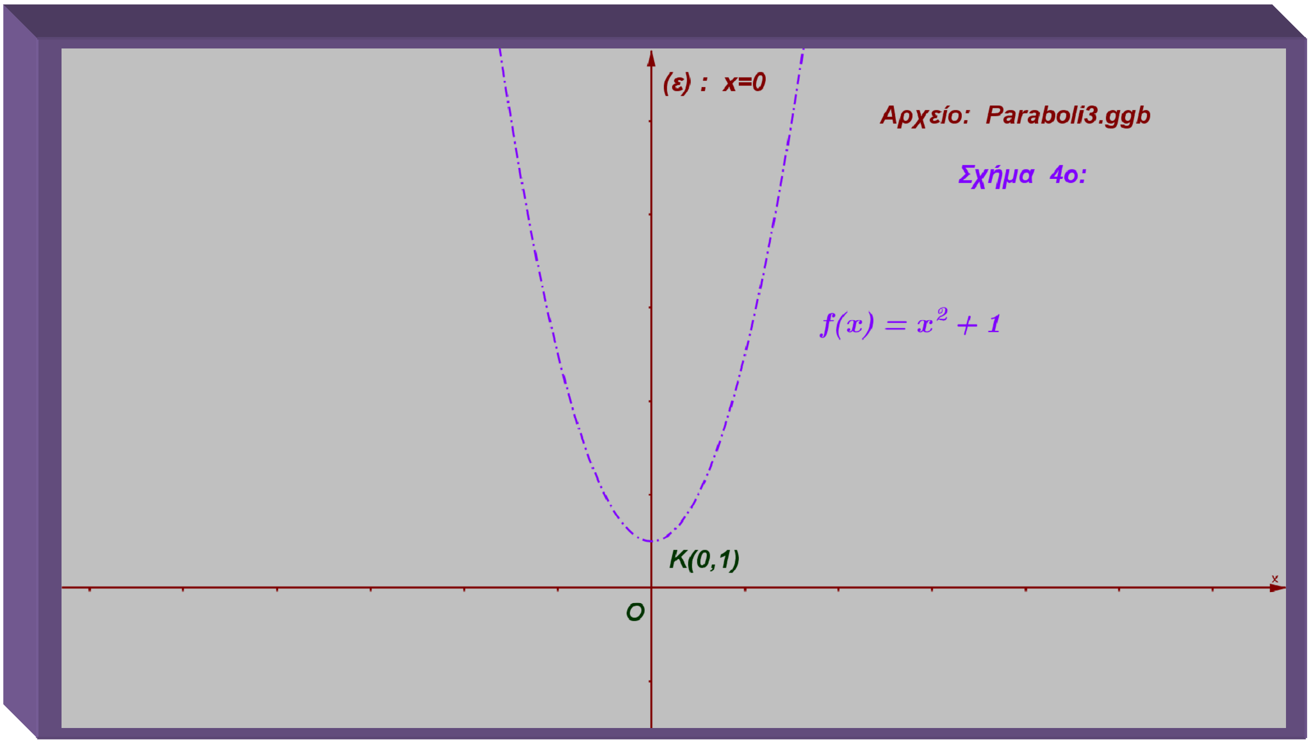
Η συνάρτηση h *δεν τέμνει τον άξονα* $x΄x$, $\alpha\varphi o\acute{\upsilon}$ $\Delta < 0$, *ενώ τέμνει τον άξονα* $\psi΄\psi$ $\sigma\tau o\; \sigma\eta\mu\varepsilon\acute{\iota}o$ $K(0,\ 1)$.

Η παραβολή h *έχει κορυφή το σημείο:* $K(0,\ 1)$ *και άξονα συμμετρίας την ευθεία* (ε) $\mu\varepsilon\;\; \varepsilon\xi\acute{\iota}\sigma\omega\sigma\eta$: $x = 0$, $\delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\; \tau o\nu\; \acute{\alpha}\xi o\nu\alpha\;\; \psi΄\psi$.

Εφόσον $\alpha = 1 > 0$ *η συνάρτηση* h *είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα:* $(-\infty, 0\,]$ *και γνησίως αύξουσα στο διάστημα:* $[0, +\infty)$, *ενώ έχει ελάχιστο:*

$$h_{min}(x) = 1, \quad \gamma\iota\alpha \quad x = 0.$$

Η γραφική παράσταση του τριωνύμου h *φαίνεται στο σχήμα που ακολουθεί:*



- *Η συνάρτηση* $y = g(x) = |x|$

Η συνάρτηση g *έχει πεδίο ορισμού το σύνολο* IR *των πραγματικών αριθμών και γράφεται απλούστερα:*

$$g(x) = \begin{cases} x & \alpha\nu \quad x \geq 0 \\ -x & \alpha\nu \quad x < 0 \end{cases}.$$

Μονοτονία της

1. *Αν* $x_1 > x_2 \geq 0 \Rightarrow g(x_1) = x_1, \quad g(x_2) = x_2, \ x_1 > x_2.$

   Άρα με: $x_1 > x_2 \geq 0 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2)$

   Δηλαδή η συνάρτηση f *είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα* $[0, +\infty)$.

2. *Αντίστοιχα, αν*

3. $0 > x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) = -x_1, \quad g(x_2) = -x_2, \ -x_1 < -x_2.$

   Άρα με: $0 > x_1 > x_2 \Rightarrow g(x_1) < g(x_2)$.

   Συνεπώς η συνάρτηση g *είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα* $(-\infty, 0]$.

Ακρότατα της g

Είναι:

$$g(x) = y = |x| \geq 0, \quad για\ κάθε\ \ x \in IR \quad και \quad g(0) = |0| = 0.$$

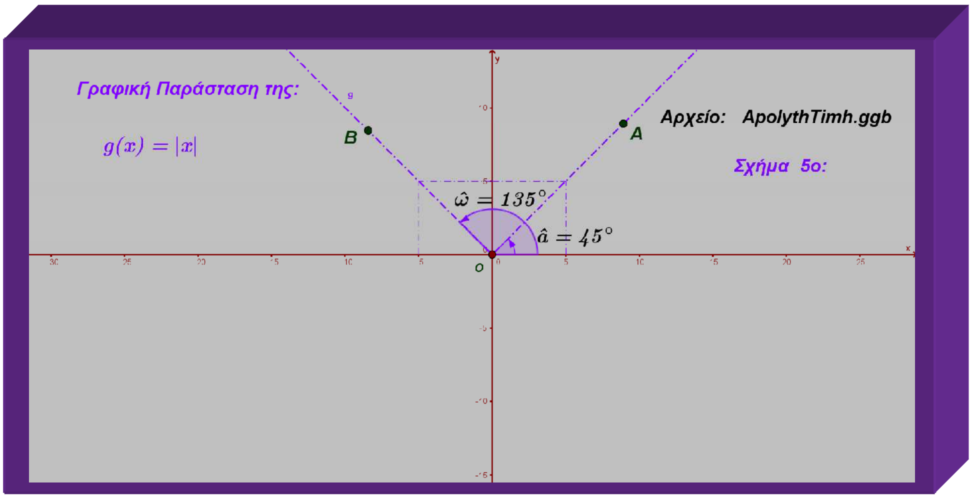
Επομένως:

$$g(x) \geq g(0) = 0, \quad για\ κάθε\ \ x \in IR,$$

που σημαίνει ότι η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με μηδέν για $x = 0$.

Γραφική παράσταση της g

Στο σχήμα 5 που ακολουθεί φαίνεται η γραφική παράσταση της g.



Η εξίσωση $y = x, \ \ x \geq 0$ έχει ως γραφική παράσταση την ημιευθεία OA που έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 1 \Rightarrow εφ\widehat{\theta} = 1 \Rightarrow \widehat{\theta} = 45°$.

Αντίστοιχα, η $y = -x, \ \ x < 0$ σχηματίζει με τον ημιάξονα Ox γωνία $\widehat{\omega} = 135°$.

Επομένως η γραφική παράσταση της g αποτελείται από τις ημιευθείες OA και OB που είναι αντίστοιχα οι διχοτόμοι της πρώτης και της δεύτερης γωνίας του συστήματος συντεταγμένων.

Από το γράφημα αυτό βλέπουμε επίσης ότι η συνάρτηση $g(x) = y = |x|$ παρουσιάζει ελάχιστο ίσο με το μηδέν για $x = 0$.

Παρατήρηση:

Οι παραστάσεις $|x|$, $|x-1|$, $|4x+3|$, $|x^2-1|$ *και γενικότερα κάθε παράσταση της μορφής* $\Pi(x)=|g(x)|$, $\text{όπου } g \text{ συνάρτηση του } x$, *είναι μη αρνητικές. Αυτό δεν σημαίνει ότι έχουν* *υποχρεωτικά* *ελαχίστη τιμή το μηδέν στη θέση* $x=0$.

Γενικά η ελαχίστη τιμή συναρτήσεων όπως η Π *είναι μη αρνητική και η θέση στην οποία εμφανίζεται δεν είναι κατ' ανάγκη η* $x=0$.

Παράδειγμα:

Αν $g(x)=\left|x^2+2x+3\right|$ *τότε:*

$$g(x)=\cdots=\left|(x+1)^2+2\right|\geq 2=g(-1).$$

Επομένως η συνάρτηση g *παρουσιάζει ελάχιστο* $g_{min}(x)=2$ $\text{για } x=-1$.

Εφαρμογές:

1. *Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:*

$$f(x)=-3x+1,\quad \varphi(x)=\begin{Bmatrix} 2x-3 & \alpha\nu & x\geq 1 \\ 3x-4 & \alpha\nu & x<1 \end{Bmatrix}\quad \kappa\alpha\iota\quad h(x)=\frac{x}{x-2}.$$

2. *Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων:*

$$f(x)=1-|x|,\quad \varphi(x)=|2x-1|\quad \kappa\alpha\iota\quad h(x)=\left|x^2+1\right|.$$