Α. Ισότητα τριγώνων γενικά.

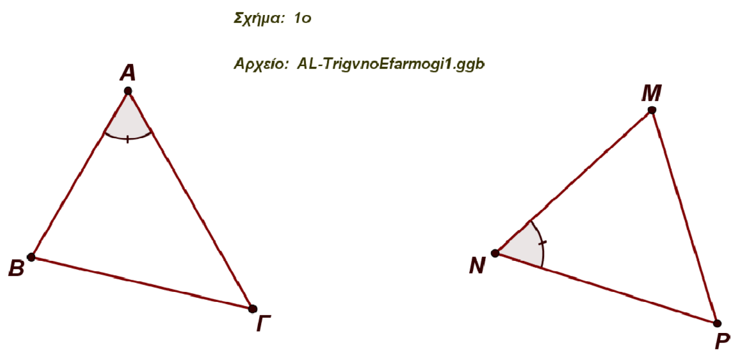
Προτάσεις που χρήζουν προσοχής

1. Για να ισχυριστείτε ότι απέναντι από ίσες πλευρές τριγώνων βρίσκονται ίσες γωνίες ή το αντίστροφο, πρέπει να δίδεται ή να έχετε αποδείξει την ισότητα των δύο τριγώνων. Γι' αυτό και η σχετική πρόταση αναφέρει:

"Σε ί σ α τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα".

Άσκηση 1η:

Στο σχήμα που ακολουθεί δίδεται ότι οι γωνίες $\widehat{A}$ και $\widehat{N}$ των τριγώνων $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle MNP$ είναι ίσες. Είναι σωστό να ισχυριστείτε ότι $B\Gamma = MP$;



Απάντηση:

Είναι λάθος να ισχυριστείτε ότι $B\Gamma = MP$, αφού δεν γνωρίζετε αν είναι ίσα τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle MNP$.

2. ***Με βάση τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων γενικά, για να διαπιστώσετε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα χρειάζεστε τρείς ισότητες, γραμμικές ή γωνιακές, εκ των οποίων μία τουλάχιστον γραμμική.***

Επομένως:

Προκειμένου να δείξετε ότι δύο τρίγωνα είναι ίσα θα γράφετε πρώτα τις ισότητες πλευρών και:

- ***Αν οι ισότητες πλευρών είναι τρείς, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα, χωρίς να χρειάζεται καμία ισότητα γωνιών.***
- ***Αν οι ισότητες πλευρών είναι δύο, τότε θα πρέπει να δείξετε ότι οι περιεχόμενες στις ίσες πλευρές γωνίες τους είναι ίσες, ενώ***
- ***Αν έχετε μια ισότητα πλευρών, τότε θα πρέπει να δείξετε ότι οι προσκείμενες γωνίες στις ίσες πλευρές τους είναι μια προς μια ίσες.***

Άσκηση 2η:

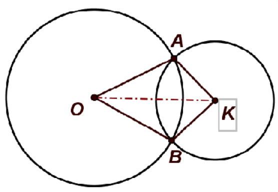
Δύο κύκλοι $(O,\ \rho)$ και $(K,\ r)$ τέμνονται στα σημεία A και B. Να δείξετε ότι η διάκεντρος τους OK διχοτομεί τις γωνίες $A\widehat{O}B$ και $A\widehat{K}B$.

Λύση:

Θα δείξουμε ότι: $A\widehat{O}K = B\widehat{O}K$ και $A\widehat{K}O = B\widehat{K}O \quad (1)$.

Σχήμα: 2ο

Αρχείο: AL-TrigvnoEfarmogi2.ggb



Από το παραπάνω σχήμα διαπιστώνουμε ότι οι γωνίες που θέλουμε να αποδείξουμε ότι είναι ίσες είναι γωνίες των τριγώνων $\triangle OAK$ και $\triangle OBK$. Γι' αυτό και τα συγκρίνουμε. Έτσι:

Τα τρίγωνα $\triangle OAK$ και $\triangle OBK$ έχουν:

$$\left.\begin{cases} OA = OB, & ακτίνες\ του\ κύκλου\ (O,\rho) \\ KA = KB, & ακτίνες\ του\ κύκλου\ (K,r) \\ OK = OK, & κοινή\ πλευρά \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle OAK = \triangle OBK \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\hat{O}K = B\hat{O}K \quad και \quad A\hat{K}O = B\hat{K}O.$$

Άσκηση 3η:

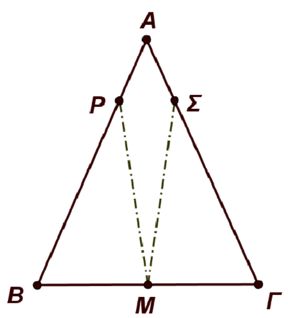
Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το μέσον M της πλευράς του $B\Gamma$. Στις πλευρές του AB και $A\Gamma$ παίρνουμε σημεία P και Σ αντίστοιχα, έτσι ώστε να είναι:

$$4AP = AB \quad και \quad 4A\Sigma = A\Gamma.$$

Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\triangle MP\Sigma$ είναι ισοσκελές και ότι $B\Sigma = \Gamma P$.

Λύση:

Θα δείξουμε ότι $MP = M\Sigma$.



Σχήμα: 3ο

Αρχείο: AL-TrigvnoEfarmogi3.ggb

Είναι $4AP = AB,\ \ 4A\Sigma = A\Gamma$ *και* $AB = A\Gamma \Rightarrow 4AP = 4A\Sigma \Rightarrow AP = A\Sigma,\ \ BP = \Gamma\Sigma.$

Τα τμήματα MP *και* $M\Sigma$ *είναι πλευρές των τριγώνων* $\triangle BMP$ *και* $\triangle \Gamma M\Sigma$*, τα οποία έχουν:*

$$\left.\begin{cases} MB = M\Gamma, \quad M\ \text{μέσον}\ B\Gamma \\ BP = \Gamma\Sigma \\ \widehat{B} = \widehat{\Gamma}, \quad \text{παρά τη βάση ισοσκελούς} \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle BMP = \triangle \Gamma M\Sigma \Rightarrow MP = M\Sigma.$$

Αφήνεται ως άσκηση η απόδειξη της ισότητας $B\Sigma = \Gamma P.$

Να εξετάσετε επίσης αν θα μπορούσατε να αποδείξετε ότι $MP = M\Sigma$ *συγκρίνοντας άλλα τρίγωνα.*

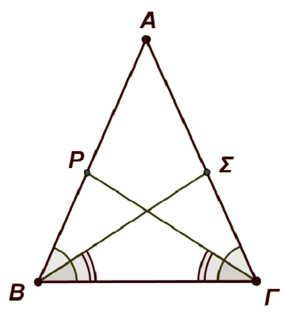
Άσκηση 4η:

Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ *με* $AB = A\Gamma$ *και οι διχοτόμοι* $BP,\ \Gamma\Sigma$ *των γωνιών του* $\widehat{B}$ *και* $\widehat{\Gamma}$*. Να δείξετε ότι:* $BP = \Gamma\Sigma.$

Λύση:

Αφού το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ *είναι ισοσκελές με* $AB = A\Gamma$ *θα είναι και* $\widehat{B} = \widehat{\Gamma}$*, ως παρά τη βάση ισοσκελούς τριγώνου, και:*

$$B\widehat{\Gamma}P = \frac{\widehat{\Gamma}}{2} = \frac{\widehat{B}}{2} = \Gamma\widehat{B}\Sigma.$$



Σχήμα: 4ο

Αρχείο: AL-TrigvnoEfarmogi4.ggb

Τα τμήματα $ΒΣ$ *και* $ΓΡ$ *είναι πλευρές των τριγώνων* $\triangle ΒΓΣ$ *και* $\triangle ΒΓΡ$, *τα οποία έχουν:*

$$\left.\begin{cases} ΒΓ = ΒΓ, \quad \text{κοινή πλευρά} \\ Β\widehat{Γ}Σ = Γ\widehat{Β}Ρ \\ Γ\widehat{Β}Σ = Β\widehat{Γ}Ρ \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle ΒΓΣ = \triangle ΒΓΡ \Rightarrow ΒΣ = ΓΡ.$$

Ως άσκηση να διατυπώσετε το αντίστροφο της παραπάνω πρότασης και να εξετάσετε αν είναι αληθής. Να δείξετε επίσης ότι $ΒΣ = ΓΡ$ *συγκρίνοντας άλλα τρίγωνα.*

Άσκηση 5η:

Δίδεται ισοσκελές τρίγωνο $\triangle ΑΒΓ$ *με* $ΑΒ = ΑΓ$ *και τα σημεία* $Ρ$ *και* $Σ$ *των πλευρών του* $ΑΒ$ *και* $ΑΓ$ *αντίστοιχα έτσι ώστε να είναι* $ΒΡ = ΓΣ$. *Προεκτείνουμε την* $ΒΓ$ *προς το μέρος του* $Β$ *και του* $Γ$ *και στις προεκτάσεις αυτές παίρνουμε τα σημεία* $Μ$ *και* $Ν$ *αντίστοιχα, έτσι ώστε να είναι:* $ΒΜ = ΓΝ$.

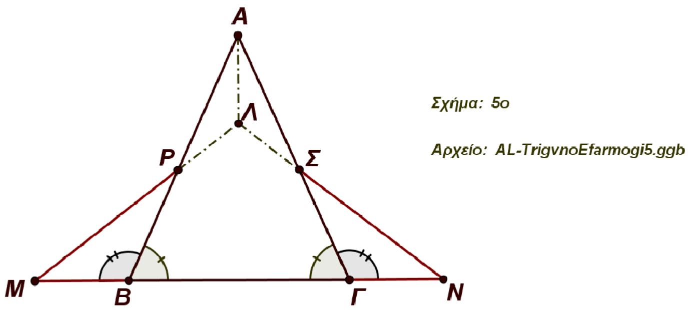
- *Να δείξετε ότι:* $ΜΡ = ΝΣ$
- *Αν* $ΜΡ \cap ΝΣ = \{Λ\}$ *δείξτε ότι:* $ΜΛ = ΝΛ$ *και* $ΛΡ = ΛΣ$
- *Δείξτε επίσης ότι η ημιευθεία* $ΑΛ$ *διχοτομεί την γωνία* $\widehat{Α}$ *του* $\triangle ΑΒΓ$.

Λύση:

- *Αφού το τρίγωνο* $\triangle ΑΒΓ$ *είναι ισοσκελές με* $ΑΒ = ΑΓ$ *θα είναι και* $\widehat{Β} = \widehat{Γ}$, *ως παρά τη βάση ισοσκελούς τριγώνου, και επομένως :*

$$Α\widehat{Β}Μ = Α\widehat{Γ}Ν, \quad \text{παραπληρωματικές ίσων γωνιών}.$$

Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΜΡ$ *και* $ΝΣ$ *που πρέπει να αποδειχθούν ίσα είναι πλευρές των τριγώνων* $\triangle ΜΒΡ$ *και* $\triangle ΝΓΣ$ *που έχουν:*



$$\left.\begin{cases} BM = \Gamma N \\ BP = \Gamma\Sigma \\ P\widehat{B}M = \Sigma\widehat{\Gamma}N \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle\, MBP = \triangle\, N\Gamma\Sigma \Rightarrow MP = N\Sigma, \quad B\widehat{M}P = \Gamma\widehat{N}\Sigma.$$

- **Απεδείχθη ότι** $B\widehat{M}P = \Gamma\widehat{N}\Sigma \Rightarrow \Lambda M = \Lambda N \overset{MP=N\Sigma}{\Rightarrow} \Lambda P = \Lambda\Sigma,$ **ως διαφορά ίσων τμημάτων.**

- **Είναι** $AB = A\Gamma \;\; \kappa\alpha\iota \;\; BP = \Gamma\Sigma \Rightarrow AB - BP = A\Gamma - \Gamma\Sigma \Rightarrow AP = A\Sigma.$

Τα τρίγωνα $\triangle\, A\Lambda P$ **και** $\triangle\, A\Lambda\Sigma$ **έχουν:**

$$\left.\begin{cases} AP = A\Sigma \\ A\Lambda = A\Lambda, \quad \text{κοινή πλευρά} \\ \Lambda P = \Lambda\Sigma \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle\, A\Lambda P = \triangle\, A\Lambda\Sigma \Rightarrow P\widehat{A}\Lambda = \Lambda\widehat{A}\Sigma.$$

Συνεπώς η ημιευθεία $A\Lambda$ **διχοτομεί την γωνία** $\widehat{A}$ **του** $\triangle\, AB\Gamma$.

B. Ισότητα ορθογωνίων τριγώνων

Προτάσεις που χρήζουν προσοχής

1. Τα κριτήρια ισότητας ορθογωνίων τριγώνων συνοψίζονται στα εξής δύο:

   Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα όταν:

   a. Δύο πλευρές του ενός είναι, μια προς μία, ίσες με δύο πλευρές του άλλου και με την προϋπόθεση ότι οι ίσες πλευρές ή θα είναι και οι δύο κάθετες πλευρές ή θα είναι και οι δύο υποτείνουσες.

   b. Έχουν μια πλευρά και μια οξεία γωνία ίσες, μια προς μία, με την προϋπόθεση ότι οι ίσες πλευρές ή θα είναι και οι δύο κάθετες πλευρές ή θα είναι και οι δύο υποτείνουσες.

2. Σας είναι ήδη γνωστές οι έννοιες των αποστάσεων: Σημείου από σημείο και σημείου από ευθεία.

   Σας υπενθυμίζω λοιπόν ότι:

   a. Η απόσταση σημείου A από το σημείο B είναι το μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AB, δηλαδή: $d(A,\ B) = (AB)$, όπου με $d(A,\ B)$ συμβολίζουμε την απόσταση των σημείων A και B και με (AB) το μήκος του AB.

   b. Η απόσταση σημείου A από ευθεία (ε) είναι το μήκος του καθέτου ευθυγράμμου τμήματος AB από το σημείο A προς την ευθεία (ε), όπου B είναι ο πόδας της καθέτου.

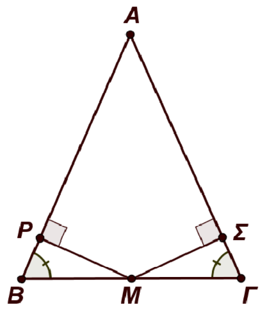
Άσκηση 6η:

Να δείξετε ότι το μέσον της βάσης ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του.

Απόδειξη:

Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το μέσον M της βάσης του $B\Gamma$. Από την διατύπωση της εφαρμογής είναι φανερό ότι μιλάμε για την απόσταση του σημείου M από τις ευθείες AB και $A\Gamma$. Γι' αυτό από το σημείο M φέρνουμε τις $MP \perp AB$ και $M\Sigma \perp A\Gamma$.

Θα δείξουμε ότι: $MP = M\Sigma$.



Σχήμα: 6ο

Αρχείο: AL-TrigvnoEfarmogi6.ggb

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle BMP$ και $\triangle \Gamma M\Sigma$ έχουν:

$$\{MB = M\Gamma \quad \kappa\alpha\iota \quad \widehat{B} = \widehat{\Gamma}\} \Rightarrow \triangle BMP = \triangle \Gamma M\Sigma \Rightarrow MP = M\Sigma.$$

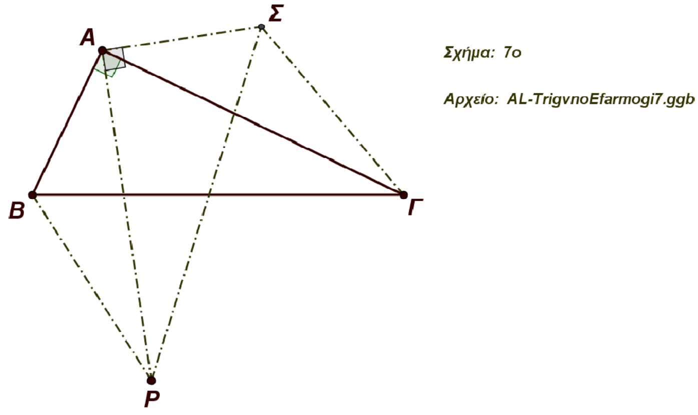
<u>Άσκηση 7η:</u>

Δίδεται ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με $\widehat{A} = 90°$. Ημιευθεία Ax τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ του $\triangle AB\Gamma$. Στην Ax παίρνουμε σημείο P έτσι ώστε να είναι $AP = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε ημιευθεία $A\psi \perp Ax$ που βρίσκεται στο ημιεπίπεδο της AB στο οποίο ανήκει και το σημείο Γ. Επί της $A\psi$ θεωρούμε σημείο Σ έτσι ώστε $A\Sigma = AB$. Να δείξετε ότι $B\Gamma = P\Sigma$ και $BP = \Gamma\Sigma$.

<u>Απόδειξη:</u>

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ και $\triangle AP\Sigma$ έχουν:

$$\{AB = A\Sigma \quad \kappa\alpha\iota \quad A\Gamma = AP\} \Rightarrow \triangle AB\Gamma = \triangle AP\Sigma \Rightarrow B\Gamma = P\Sigma.$$



Είναι επίσης: $B\hat{A}P = 90° - P\hat{A}\Gamma = P\hat{A}\Sigma - P\hat{A}\Gamma = \Sigma\hat{A}\Gamma.$

Έτσι, τα τρίγωνα $\triangle AB P$ *και* $\triangle A\Gamma\Sigma$ *έχουν:*

$$\{AB = A\Sigma,\ AP = A\Gamma \ \text{και}\ B\hat{A}P = \Sigma\hat{A}\Gamma\} \Rightarrow \triangle ABP = \triangle A\Gamma\Sigma \Rightarrow BP = \Gamma\Sigma.$$

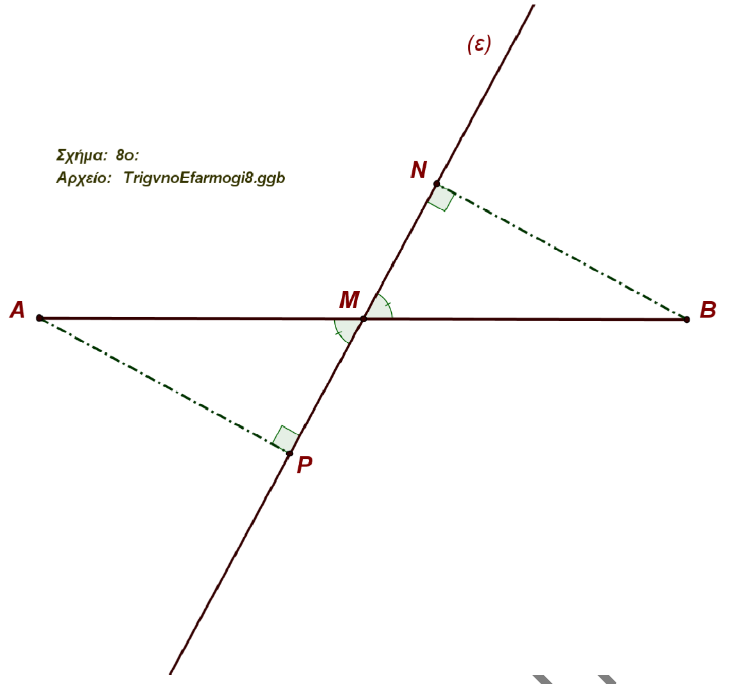
Βασική Πρόταση

Να δείξετε ότι τα άκρα A *και* B *ευθυγράμμου τμήματος* AB *ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσον* M *του* AB.

Απόδειξη:

Θεωρούμε ευθύγραμμο τμήμα AB, *το μέσον του* M *και ευθεία* (ε) *διερχόμενη από το* M. *Αν* $AP,\ BN \perp (\varepsilon)$ *τότε:*

Τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle AMP$ *και* $\triangle BMN$ *έχουν:*



$MA = MB$ και $A\widehat{M}P = B\widehat{M}N$ ως κατακορυφήν. Επομένως είναι ίσα και συνεπώς θα είναι και: $AP = BN$. Δηλαδή τα άκρα A και B του ευθυγράμμου τμήματος AB ισαπέχουν από την ευθεία (ε).

Ας δούμε μια εφαρμογή τώρα από την οποία φαίνεται πόσο σημαντική είναι η παραπάνω πρόταση.

Εφαρμογή:

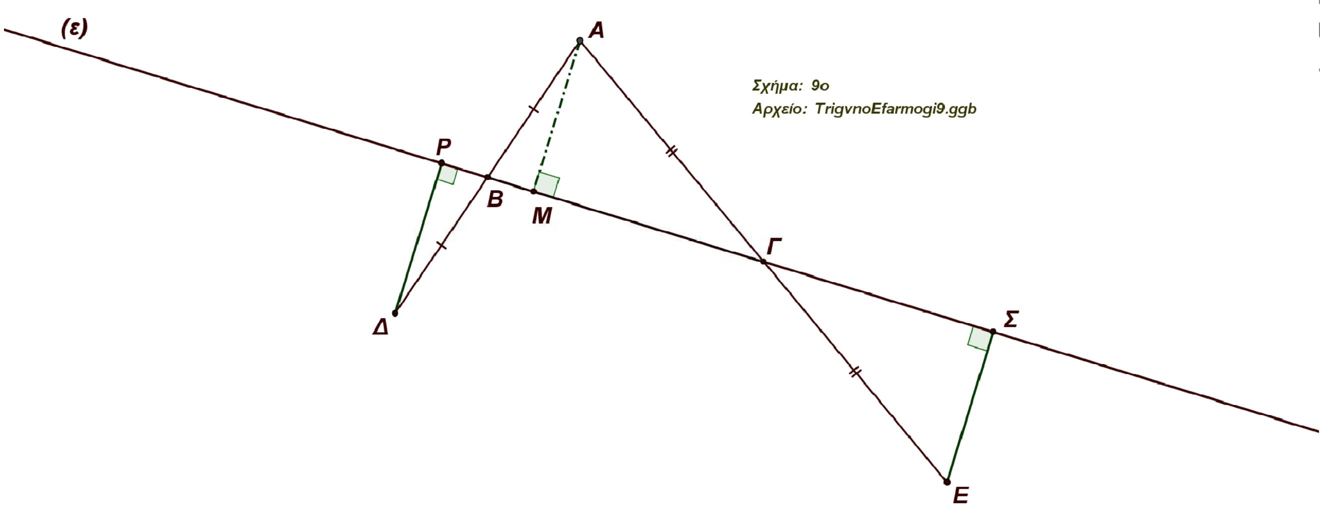
Δίδεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$. Στην προέκταση της πλευράς του AB, προς το μέρος του B, παίρνουμε σημείο Δ : $B\Delta = AB$. Όμοια, στην προέκταση της $A\Gamma$, προς το μέρος του Γ, παίρνουμε σημείο E : $\Gamma E = A\Gamma$. Κατασκευάζουμε τις αποστάσεις ΔP και $E\Sigma$ των σημείων Δ και E από την ευθεία $B\Gamma$ $\{P, E \in (B\Gamma)\}$. Να δείξετε ότι: $\Delta P = E\Sigma$.

Απόδειξη:

Είναι φανερό ότι τα ορθογώνια τρίγωνα $\triangle B\Delta P$ και $\triangle \Gamma E\Sigma$ δ ε ν είναι ίσα.

Όμως το τμήμα ΔP είναι η απόσταση του άκρου Δ του ευθυγράμμου τμήματος $A\Delta$ από την ευθεία $B\Gamma$, που διέρχεται από το μέσον B του $A\Delta$. Σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση η απόσταση ΔP είναι ίση με την απόσταση του A από την ευθεία $B\Gamma$.

Γι' αυτό κατασκευάζουμε την απόσταση του A *από την* (ε). *Έστω λοιπόν* $AM \perp B\Gamma$, $M \in (\varepsilon)$. *Είναι τότε:* $\Delta P = AM$ (1).



Όμως η ευθεία (ε) *διέρχεται από το μέσον* Γ *του ευθυγράμμου τμήματος* AE. *Άρα τα σημεία* A *και* E *θα ισαπέχουν από την* (ε). *Δηλαδή:* $E\Sigma = AM$ (2).

Από τις ισότητες (1) *και* (2) *συμπεραίνουμε ότι:* $\Delta P = E\Sigma$.

Με τα δεδομένα της άσκησης αυτής να δικαιολογήσετε γιατί τα τμήματα $\Delta\Sigma$ *και* EP *είναι ίσα.*

Σχόλιο: Η κατασκευή της $AM \perp B\Gamma$, $M \in (\varepsilon)$ *έγινε με την λογική που περιγράφεται παραπάνω.*

Επίσης αποδείξαμε την ισότητα δύο ευθυγράμμων τμημάτων συγκρίνοντας τα προς τρίτο τμήμα.

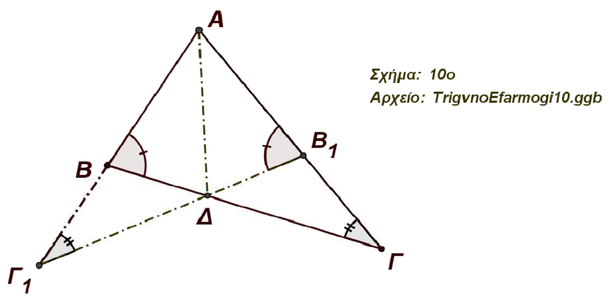
Άσκηση 8η:

Θεωρούμε τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ *και τα σημεία* Γ_1, B_1 *των πλευρών του* AB *και* $A\Gamma$ *αντίστοιχα, έτσι ώστε να είναι:* $A\Gamma_1 = A\Gamma$ *και* $AB_1 = AB$. *Αν η ευθεία* $B_1\Gamma_1$ *τέμνει την* $B\Gamma$ *στο* Δ, *να δείξετε ότι το ευθύγραμμο τμήμα* $A\Delta$ *είναι διχοτόμος του* $\triangle AB\Gamma$.

<u>Απόδειξη:</u>

Τα τρίγωνα $\triangle AB\Gamma$ *και* $\triangle AB_1\Gamma_1$ *έχουν:*

$$\{AB = A\Gamma_1,\ \ A\Gamma = AB_1 \ \ \text{και} \ \ \hat{A} = \hat{A} \ (\text{κοινή γωνία})\} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \triangle AB\Gamma = \triangle AB_1\Gamma_1 \Rightarrow B\Gamma = B_1\Gamma_1,\ \ A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}_1\Gamma_1 \ \ \text{και} \ \ A\hat{\Gamma}B = A\hat{\Gamma}_1B_1 \quad (1).$$

Η $A\hat{B}\Gamma = A\hat{B}_1\Gamma_1 \Rightarrow \Gamma_1\hat{B}\Delta = \Delta\hat{B}_1\Gamma,$ *παραπληρωματικές ίσων γωνιών.*

Είναι επίσης: $B\Gamma_1 = \Gamma B_1,$ *ως διαφορές ίσων τμημάτων.*

Έτσι, τα τρίγωνα $\triangle \Gamma_1B\Delta$ *και* $\triangle \Gamma B_1\Delta$ *έχουν:*

$$\{B\Gamma_1 = \Gamma B_1,\ \ A\Gamma = AB_1 \ \ \text{και} \ \ \hat{A} = \hat{A} \ (\text{κοινή γωνία})\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \triangle \Gamma_1B\Delta = \triangle \Gamma B_1\Delta \Rightarrow \Gamma_1\Delta = \Delta\Gamma \quad (2).$$

Τα τρίγωνα $\triangle A\Gamma_1\Delta$ *και* $A\Delta\Gamma$ *έχουν:*

$$\{A\Gamma_1 = A\Gamma,\ \ \Gamma_1\Delta = \Gamma\Delta \ \ \text{και} \ \ A\Delta = A\Delta\} \Rightarrow \triangle A\Gamma_1\Delta \ \ \text{και} \ \ A\Delta\Gamma \Rightarrow B\hat{A}\Delta = \Delta\hat{A}\Gamma.$$