Ορισμός: Έστω D ένα μη κενό υποσύνολο του IR. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής, με πεδίο ορισμού το σύνολο D και τιμές στο IR, μια διαδικασία, «δηλαδή ένα κανόνα f», με την οποία σε κάθε στοιχείο $x \in D$ αντιστοιχίζεται ένα και μόνον ένα στοιχείο $y \in IR$, που ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με: $y = f(x)$.

Συμβολικά γράφουμε: $f \,:\, D \to IR$ ή $D \ni x \overset{f}{\overbrace{->}} y = f(x) \in IR$.

Το $f(x)$ λέγεται τύπος της συνάρτησης, ενώ η εξίσωση $y = f(x)$ λέγεται εξίσωση της f.

Σε μια συνάρτηση με εξίσωση $y = f(x)$ το x, που παριστάνει οποιοδήποτε στοιχείο του D, ονομάζεται ανεξάρτητη μεταβλητή, ενώ το y που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης f στο x, ονομάζεται εξαρτημένη μεταβλητή.

Ο τύπος μιας συνάρτησης δεν είναι υποχρεωτικό ότι θα δίδεται με τη μορφή μιας αλγεβρικής παράστασης. Μια συνάρτηση δηλαδή μπορεί να έχει πολλαπλό τύπο, όπως για παράδειγμα η συνάρτηση:

$$f \quad \mu\varepsilon \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 1 \\ 2x - 1, & x > 1 \end{cases}.$$

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις τιμές της συνάρτησης f σε όλα τα $x \in D$, ονομάζεται σύνολο τιμών της f και το συμβολίζουμε με R_f ή $f(D)$.

Δηλαδή: $R_f = \{\, y \in IR \,:\, \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota \;\; x \in D \;\; \mu\varepsilon \;\; y = f(x)\}$

Λέμε επίσης ότι μια συνάρτηση $f \,:\, D \to IR$ είναι ορισμένη σ' ένα σύνολο E, όταν το E είναι υποσύνολο του πεδίου ορισμού της, δηλαδή: $E \subseteq D$. Στην περίπτωση αυτή το σύνολο τιμών της f συμβολίζεται με $f(E)$ και είναι:

$$f(E) = \{y \in IR \,:\; \upsilon\pi\acute{\alpha}\rho\chi\varepsilon\iota \;\; x \in E \;\; \mu\varepsilon \;\; y = f(x)\} \subseteq R_f.$$

Το στοιχείο $x_0 \in D_f$ θα ονομάζεται σταθερό ή αμετάβλητο στοιχείο μέσω της f αν, και μόνον αν είναι: $f(x_0) = x_0$.

Τ ο ν ί ζ ε τ α ι ότι από το σημείο αυτό και μετά θα αναφερόμαστε σε συναρτήσεις των οποίων το πεδίο ορισμού είναι διάστημα ή ένωση διαστημάτων του IR.

Γράφημα Συνάρτησης

Έστω η συνάρτηση $f : D \to IR$. Το σύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη $(x, f(x))$ όπου $x \in D$ λέγεται γράφημα της f και συμβολίζεται με G_f.

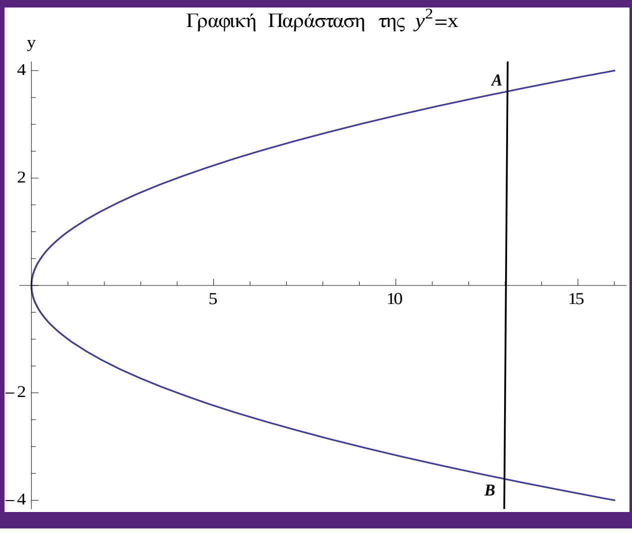
Είναι δηλαδή: $G_f = \{ (x, f(x)) \quad \mu\varepsilon \quad x \in D \}$.

Η γεωμετρική παράσταση του γραφήματος G_f μιας συνάρτησης f στο καρτεσιανό επίπεδο, είναι η γραφική της παράσταση. Σημειώνεται ότι δεν είναι πάντοτε εφικτή η κατασκευή της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης, όπως συμβαίνει για παράδειγμα με την :

$$f \quad \mu\varepsilon \quad f(x) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \alpha\nu & x \in Q \\ \\ 0 & \alpha\nu & x \in IR - Q \end{matrix} \right\} \; \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta \;\; Dirichlet$$

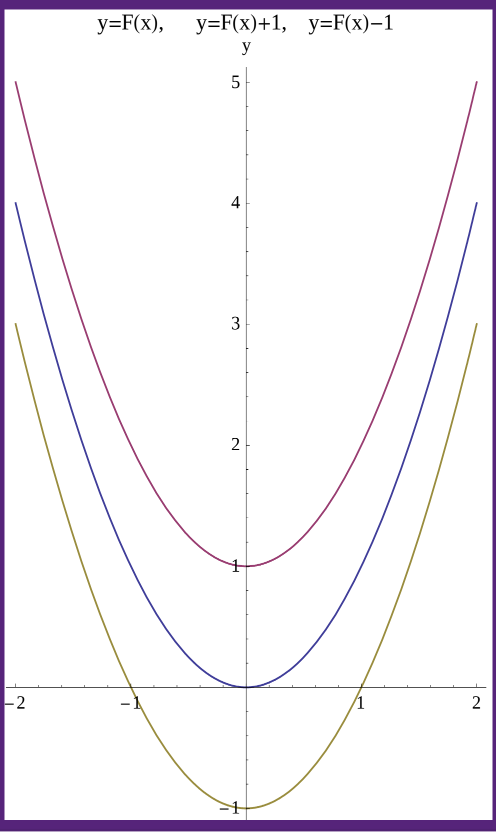
Από τον ορισμό της συνάρτησης προκύπτει ότι δεν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τετμημένη. Άρα μια καμπύλη γραμμή στο καρτεσιανό επίπεδο είναι γραφική παράσταση συνάρτησης, αν κάθε ευθεία παράλληλη στον άξονα $y'y$ τέμνει την καμπύλη αυτή το πολύ σ' ένα σημείο.

Παραδείγματα γραφικών παραστάσεων



*Η γραφική παράσταση του διπλανού σχήματος **δ ε ν** είναι γραφική παράσταση **συνάρτησης**, αφού υπάρχει για παράδειγμα η ευθεία $AB \parallel y'y$ που τέμνει το γράφημα σε δύο σημεία.*

Γραφική Παράσταση των Συναρτήσεων $y = F(x)$ *και* $y = F(x) + c, \quad c \in IR^*$.

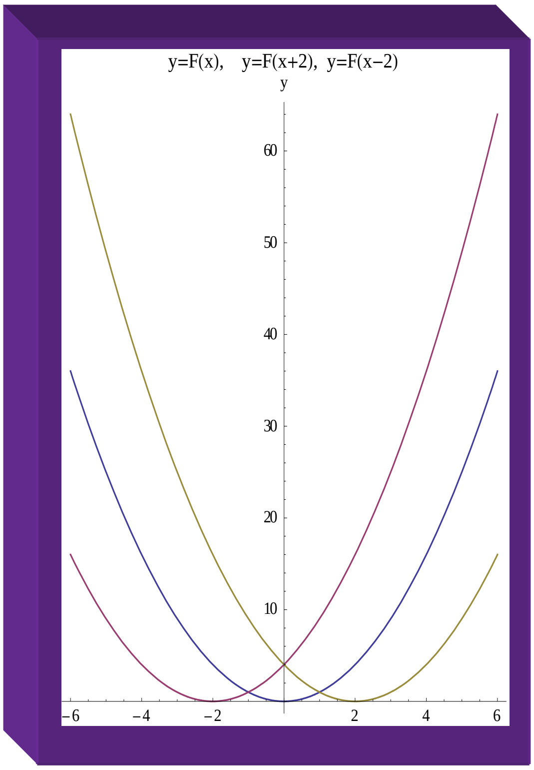


- $y = F(x)$
- $y = F(x) + 1$
- $y = F(x) - 1$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = F(x) + c, \quad c \in IR^*$ *είναι μια παράλληλη μετατόπιση, κατά τη διεύθυνση του άξονα* $y'y$, *της γραφικής παράστασης της* F.

Η μετατόπιση αυτή είναι προς τα επάνω εάν $c > 0$ *και προς τα κάτω αν* $c < 0$.

Γραφική Παράσταση των Συναρτήσεων: $y = F(x)$, $y = F(x+c)$, $c \in IR^*$



- $y = F(x)$
- $y = F(x+2)$
- $y = F(x-2)$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = F(x+c)$ είναι μια παράλληλη μετατόπιση, κατά τη διεύθυνση του άξονα $x'x$, της γραφικής παράστασης της F.

Η μετατόπιση αυτή είναι προς τα αριστερά εάν $c > 0$ και προς τα δεξιά εάν $c < 0$.

Π α ρ α τ η ρ ή σ ε ι ς:

Η αντιστοιχία $f : D_f \to IR$ είναι συνάρτηση με πεδίο ορισμού το σύνολο D_f, αν και μόνον αν:

$$\text{για κάθε } x_1, x_2 \in D_f \quad \text{με} \quad x_1 = x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

ή ισοδύναμα: για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq x_2$.

Αν για μια συνάρτηση με τύπο $f(x)$ δεν δίδεται το πεδίο ορισμού της, τότε αυτό ορίζεται ως το ευρύτερο υποσύνολο του IR για το οποίο έχει έννοια πραγματικού αριθμού το $f(x)$. Δηλαδή:

$$D_f = \{x \in IR \ : \ f(x) \in IR\} \subseteq IR.$$

Όταν δίδεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f : D_f \to IR$ τότε:

1. *Το πεδίο ορισμού της είναι το σύνολο των τετμημένων των σημείων της G_f.*

2. *Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο των τεταγμένων των σημείων της G_f.*

3. *Η τιμή της f στο σημείο $x_0 \in D_f$ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της ευθείας $x = x_0$ και της G_f.*

4. *Το σημείο $P(x_0,\ y_0)$ ανήκει στη γραφική παράσταση της f αν, και μόνον αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της.*

5. *Η τομή της γραφικής παράστασης συνάρτησης f και του άξονα $x'x$ βρίσκεται από τη λύση του συστήματος: $\{y = f(x) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ y = 0 \ \ \mu\varepsilon \ \ x \in D_f\}$. Αντίστοιχα, η τομή της γραφικής παράστασης της f και του άξονα $y'y$ βρίσκεται από τη λύση του συστήματος:*

$$\{\, y = f(x) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x = 0 \ \ \varepsilon\varphi\acute{o}\sigma o\nu \ \ 0 \in D_f \,\}.$$

Το σημείο τομής είναι τότε το σημείο $P(0, f(0))$.

Η τομή των γραφικών παραστάσεων $G_f,\ G_\varphi$ δύο συναρτήσεων f και φ προσδιορίζεται από τη λύση του συστήματος:

$$\{y = f(x) \ \ \kappa\alpha\iota \ \ y = \varphi(x) \ \ \mu\varepsilon \ \ x \in D_f \cap D_\varphi\}.$$

6. *Η γραφική παράσταση συνάρτησης $f: \ D_f \to IR$ βρίσκεται εξ' ολοκλήρου πάνω από τον άξονα $x'x$, αν και μόνον αν είναι: $f(x) > 0 \quad \forall x \in D_f$.*

   Αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της $f: \ D_f \to IR$ βρίσκεται εξ' ολοκλήρου κάτω από τον άξονα $x'x$, αν και μόνον αν είναι: $f(x) < 0 \quad \forall x \in D_f$.

7. *Η γραφική παράσταση συνάρτησης φ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση συνάρτησης φ, αν και μόνον αν είναι: $f(x) > \varphi(x) \ \ \mu\varepsilon \ \ x \in D_f \cap D_\varphi$.*

   Αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της φ βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της φ, αν και μόνον αν είναι: $f(x) < \varphi(x) \ \ \mu\varepsilon \ \ x \in D_f \cap D_\varphi$.

Μονοτονία Συνάρτησης

Θεωρούμε συνάρτηση $f : D_f \to IR$ *και το μη κενό διάστημα* D *του πεδίου ορισμού της* $D_f \subseteq IR$.

Ο ρ ι σ μ ό ς: *Θα λέμε ότι η συνάρτηση* φ *είναι γ ν η σ ί ω ς αύξουσα στο* D, *όταν:*

$$\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x_1, x_2 \in D \quad \mu\varepsilon \quad x_1 < x_2 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \quad f(x_1) < f(x_2).$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση φ *θα λέγεται γ ν η σ ί ω ς φθίνουσα στο* D, *όταν:*

$$\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x_1, x_2 \in D \quad \mu\varepsilon \quad x_1 < x_2 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \quad f(x_1) > f(x_2).$$

Η συνάρτηση f *θα ονομάζεται γνησίως μονότονη στο διάστημα* D *του πεδίου ορισμού της, αν είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα σ' αυτό.*

Ο ρ ι σ μ ό ς: *Θα λέμε ότι η συνάρτηση* f *είναι α ύ ξ ο υ σ α στο* D, *όταν:*

$$\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x_1, x_2 \in D \quad \mu\varepsilon \quad x_1 < x_2 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \quad f(x_1) \leq f(x_2).$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση f *θα λέγεται φ θ ί ν ο υ σ α στο* D, *όταν:*

$$\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x_1, x_2 \in D \quad \mu\varepsilon \quad x_1 < x_2 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota: \quad f(x_1) \geq f(x_2).$$

Η συνάρτηση f *θα ονομάζεται μονότονη στο διάστημα* D *του πεδίου ορισμού της, αν είναι αύξουσα ή φθίνουσα σ' αυτό.*

Παράδειγμα 1ο:

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f *με* $f(x) = \begin{cases} 2x - 3, & \alpha\nu \quad x \leq 0 \\ x - 3, & \alpha\nu \quad x > 0 \end{cases}$ *είναι γνησίως αύξουσα.*

Λ ύ σ η:

Αν $x_1 < x_2 \leq 0$ *τότε:* $2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (1).$

Αν $0 < x_1 < x_2$ *τότε:* $x_1 - 3 < x_2 - 3 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (2).$

Τέλος αν $x_1 \leq 0 < x_2$ *θα είναι:*

$$\left\{\begin{matrix} 2x_1 - 3 \leq -3 \\ \kappa\alpha\iota \\ x_2 - 3 > -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} f(x_1) \leq -3 \\ \kappa\alpha\iota \\ f(x_2) > -3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad (3).$$

Από τις $(1),\ (2)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ (3)$ *προκύπτει ότι η συνάρτηση* f *είναι γνησίως αύξουσα στο* IR.

Παράδειγμα 2ο: *Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση*

$$f \quad \mu\varepsilon\ \tau\acute{\upsilon}\pi o \quad f(x) = \frac{x-4}{x-5}.$$

Η f *ορίζεται στο σύνολο* $D_f = IR - \{5\} = (-\infty,\ 5) \cup (5, +\infty)$.

Μελέτη της μονοτονίας της f *< Συνθετικά >*

Για κάθε $x \neq 5$ *είναι:*

$$f(x) = \frac{x-4}{x-5} = \frac{x-5+1}{x-5} = 1 + \frac{1}{x-5} \qquad (1).$$

Αν $x_1 < x_2 < 5$ *τότε:*

$$x_1 - 5 < x_2 - 5 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 5} > \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_1 - 5} > 1 + \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (2).$$

Επομένως η f *είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα* $(-\infty,\ 5)$.

Αν $5 < x_1 < x_2$ *τότε:*

$$0 < x_1 - 5 < x_2 - 5 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 5} > \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_1 - 5} > 1 + \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad (3).$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(5,+\infty)$.

Τέλος αν $x_1 < 5 < x_2$ θα είναι:

$$x_1 - 5 < 0 < x_2 - 5 \Rightarrow \frac{1}{x_1 - 5} < 0 < \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_1 - 5} < 1 < 1 + \frac{1}{x_2 - 5} \Rightarrow$$

$$f(x_1) < 1 < f(x_2) \quad (4).$$

Από τις (2), (3) $και$ (4) συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,\ 5)$ $και$ $(5,+\infty)$, χωρίς όμως να είναι γνησίως φθίνουσα στην ένωση τους, δηλαδή στο πεδίο ορισμού της $D_f = IR - \{5\}$.

Παρατήρηση: Μια συνάρτηση f μπορεί να είναι γνησίως μονότονη στα διαστήματα $A,\ B \subseteq D_f$, χωρίς να είναι γνησίως μονότονη στην ένωση τους.

Ολικά Ακρότατα Συνάρτησης

Θεωρούμε συνάρτηση $f\ :\ D_f \to IR,\ \ D_f \subseteq IR.$.

Ο ρ ι σ μ ό ς: Λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D_f$ ολικό μέγιστο ή απλούστερα μέγιστο ίσο με $f(x_0)$, αν και μόνον αν είναι:

$$f(x) \le f(x_0),\quad για\ κάθε\ \ x \in D_f.$$

Ο ρ ι σ μ ό ς: Λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο σημείο $x_0 \in D_f$ ολικό ελάχιστο ή απλούστερα ελάχιστο ίσο με $f(x_0)$, αν και μόνον αν είναι:

$$f(x) \ge f(x_0),\quad για\ κάθε\ \ x \in D_f.$$

Το ολικό μέγιστο ή το ολικό ελάχιστο συνάρτησης f ονομάζονται ολικά ακρότατα ή απλούστερα ακρότατα αυτής.

Παρατήρηση: *Προκειμένου μια συνάρτηση f να παρουσιάζει ελάχιστο <<αντ. μέγιστο>> δεν αρκεί να ισχύει η σχέση: $f(x) \geq \varepsilon$, $<< \alpha\nu\tau.\ f(x) \geq M \gg$, $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in D_f$. Πρέπει επιπλέον να υπάρχει $x_0 \in D_f\ :\ f(x_0) = \varepsilon, \ll \alpha\nu\tau.\ :\ f(x_0) = M \gg$.*

Παράδειγμα 3ο: *Δείξετε ότι η συνάρτηση f $\mu\varepsilon$ $f(x) = |x-1|$ παρουσιάζει ελάχιστο.*

Λ ύ σ η:

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $D_f = IR$ και:

$f(x) = |x-1| \geq 0\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in IR\ \ (1).$

Είναι όμως: $f(1) = 0 \quad (2).$

Έτσι, η σχέση (1) γράφεται:

$f(x) \geq f(1) = 0\ \ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in IR \quad (3).$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο,

$f_{Min}(x) = 0, \quad \sigma\tau\eta\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\eta\ \ x_0 = 1.$

Όταν για μια συνάρτηση f είναι: $f(x) \geq E$ για κάθε $x \in D_f$, τότε ο αριθμός E είναι ολικό ελάχιστο της f, μ ό ν ο ν εφόσον το E αποτελεί τιμή της.

Δηλαδή, $f_{min}(x) = E$, αν:

$f(x) \geq E\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in D_f$ και

υπάρχει $x_0 \in D_f\ :\ f(x_0) = E$.

Παρατήρηση:

Οι παραστάσεις $|x|$, $|x-1|$, $|4x+3|$, $|x^2-1|$ και γενικότερα κάθε παράσταση της μορφής $\Pi(x) = |g(x)|$, $\acute{o}\pi o\upsilon\ \ g\ \ \sigma\upsilon\nu\acute{\alpha}\rho\tau\eta\sigma\eta\ \tau o\upsilon\ \ x$, είναι μη αρνητικές. Αυτό δεν σημαίνει ότι έχουν <u>υποχρεωτικά</u> ελαχίστη τιμή το μηδέν στη θέση $x = 0$.

Γενικά η ελαχίστη τιμή συναρτήσεων όπως η Π είναι μη αρνητική και η θέση στην οποία εμφανίζεται δεν είναι κατ' ανάγκη η $x = 0$.

Παράδειγμα:

Αν $g(x) = \left|x^2+2x+3\right|$ τότε: $g(x) = \cdots = \left|(x+1)^2+2\right| \geq 2 = g(-1).$

Επομένως η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο $g_{min}(x) = 2\ \ \ \gamma\iota\alpha\ \ x = -1.$

Συχνά οι τιμές συνάρτησης έχουν μια χαρακτηριστική ιδιότητα. Με βάση αυτή την ιδιότητα μια συνάρτηση $f : D_f \to IR$ *μπορεί να λέγεται:*

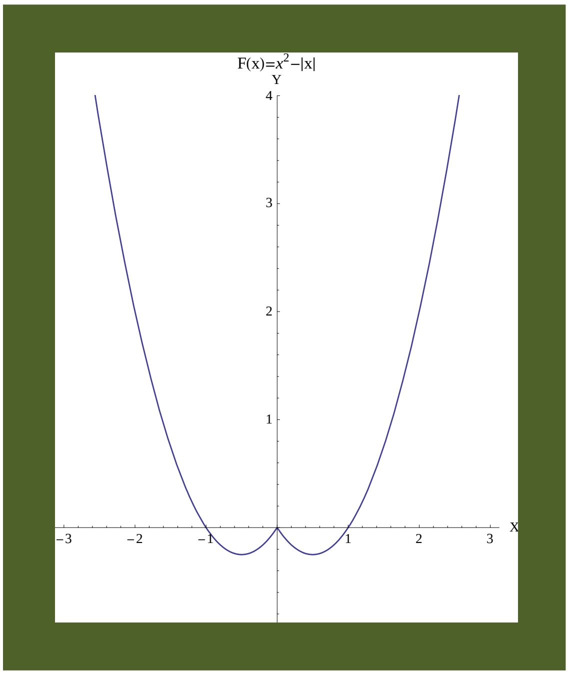
Ά ρ τ ι α Συνάρτηση:

Ο ρ ι σ μ ό ς: *Η συνάρτηση* $f : D_f \to IR$ *θα ονομάζεται άρτια όταν:*

- *Έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό, δηλαδή για κάθε* $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ *και*
- $f(-x) = f(x)$ *για κάθε* $x \in D_f$.

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 1ο

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f *με* $f(x) = x^2 - |x|$ *είναι άρτια.*



Λ ύ σ η:

Η συνάρτηση f *έχει πεδίο ορισμού:*

$D_f = IR$, *που είναι συμμετρικό ως προς το μηδέν, αφού για κάθε* $x \in IR \Rightarrow -x \in IR$.

Για κάθε $x \in IR$ *είναι:*

$f(-x) = (-x)^2 - |-x| = x^2 - |x| = f(x)$.

Επομένως η συνάρτηση f *είναι άρτια.*

Π ε ρ ι τ τ ή Συνάρτηση:

Ο ρ ι σ μ ό ς: **Η συνάρτηση $f \,:\, D_f \to IR$ θα λέγεται περιττή όταν:**

- **Έχει πεδίο ορισμού συμμετρικό, δηλαδή για κάθε $x \in D_f \Rightarrow -x \in D_f$ και**
- **$f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in D_f$.**

Π α ρ ά δ ε ι γ μ α 2ο

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f με $f(x) = x^3 - x|x|$ είναι άρτια ή περιττή.

Λ ύ σ η:

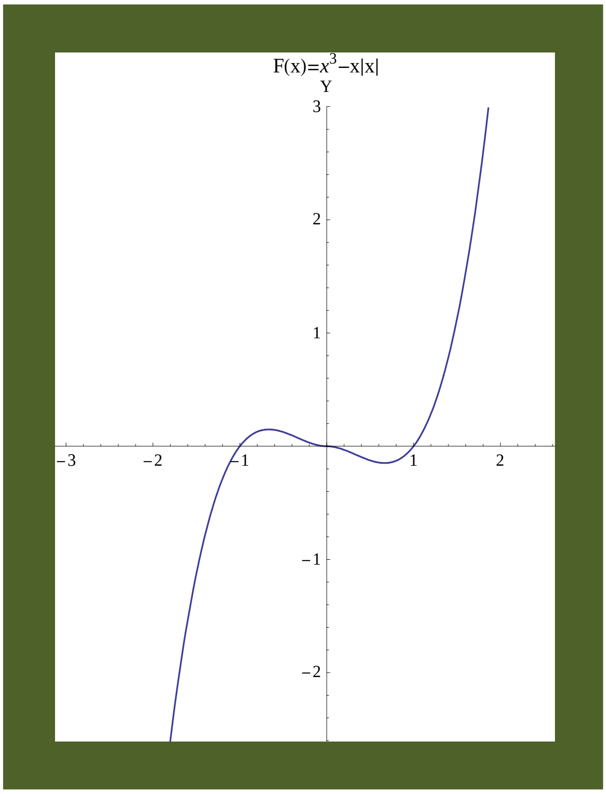
Η συνάρτηση f ορίζεται στο σύνολο $D_f = IR$, που είναι συμμετρικό διάστημα.

Για κάθε $x \in IR$ είναι:

$$f(-x) = (-x)^3 - (-x)|-x| = -x^3 + x|x| \Rightarrow$$

$$f(-x) = -f(x).$$

Επομένως η συνάρτηση f είναι περιττή.



Η γραφική παράσταση κάθε περιττής συνάρτησης είναι συμμετρική ως προς την αρχή Ο του συστήματος συντεταγμένων, αφού για κάθε σημείο $M(x,\ f(x)) \in G_f$ και το σημείο $M'(-x, -f(x)) \in G_f$.

Αν το μηδέν ανήκει στο πεδίο ορισμού περιττής συνάρτησης f, τότε: $f(0) = 0$.

Λυμένα Θέματα:

1. ***Θεωρούμε την αντιστοιχία*** $f\ :\ D_f \to IR$ ***με*** $x \overset{f}{\widetilde{->}} y \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$ ***Να εξετάσετε αν η αντιστοιχία αυτή ορίζει συνάρτηση.***

Λύση:

Για την εύρεση του πεδίου ορισμού D_f ***της*** f ***λύνουμε τη σχέση*** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ***ως προς*** y ***και έχουμε:*** $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = \frac{4-4x^2}{4}$ $(1).$

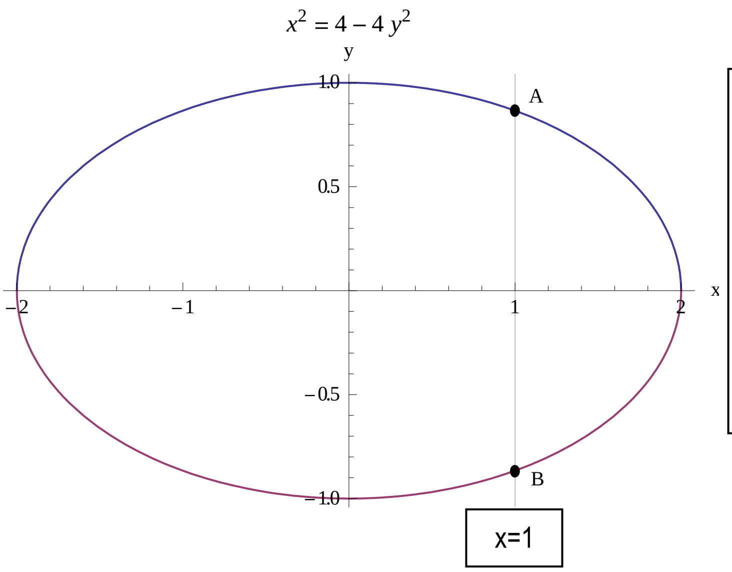
Για να ισχύει η (1) πρέπει να είναι: $\frac{4-4x^2}{4} \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1.$

Επομένως $D_f = [-2,\ 2].$

Έστω $x_1,\ x_2 \in [-2,\ 2]$ ***με*** $x_1 = x_2 \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow -4x_1^2 = -4x_2^2 \Rightarrow$

$$4-4x_1^2 = 4-4x_2^2 \Rightarrow \frac{4-4x_1^2}{4} = \frac{4-4x_2^2}{4} \Rightarrow y_1^2 = y_2^2 \Rightarrow y_1 = \pm y_2.$$

Άρα η αντιστοιχία f ***δεν ορίζει συνάρτηση.***



Η αντιστοιχία f δεν ορίζει συνάρτηση, γι' αυτό και υπάρχουν ευθείες παράλληλες στον άξονα $y'y$ που τέμνουν την G_f σε δύο σημεία.

2. ***Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in IR$ να βρεθεί το ευρύτερο υποσύνολο του IR για το οποίο η σχέση $f(x) = \sqrt{x^2 - 4\lambda x + 4\lambda}$ ορίζει συνάρτηση.***

Λύση:

Είναι φανερό ότι: $D_f = \{x \in IR \ : \ x^2 - 4\lambda x + 4\lambda \geq 0\}$ (1).

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $\varphi(x) = x^2 - 4\lambda x + 4\lambda$ είναι:

$$\Delta(\lambda) = 16\lambda^2 - 16\lambda = 16\lambda(\lambda - 1) \quad (2),$$

το δε πρόσημο της φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί:

λ	$-\infty$		*0*		*1*		$+\infty$
$\Delta(\lambda)$		$+$	*0*	$-$	*0*	$+$	

Οι ρίζες του τριωνύμου $\varphi(\lambda)$ είναι:

$$\left\{\begin{array}{ll} \rho_{1,2} = 2\lambda \pm 2\sqrt{\lambda(\lambda - 1)}, & \alpha\nu \ \ \Delta(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda < 0 \ \ \text{ή} \ \ \lambda > 1 \\ \Delta\iota\pi\lambda\text{ή} \ \rho\text{ί}\zeta\alpha \ \ \rho_0 = 0, & \alpha\nu \ \ \lambda = 0 \\ \Delta\iota\pi\lambda\text{ή} \ \rho\text{ί}\zeta\alpha \ \ \rho_0 = 2, & \alpha\nu \ \ \lambda = 1 \end{array}\right\}.$$

Εάν $0 < \lambda < 1$ τότε το τριώνυμο $\varphi(x)$ δεν έχει ρίζες.

Σχετικά με το πρόσημο του τριωνύμου $\varphi(x)$ έχουμε:

- ***Αν $\lambda < 0$ ή $\lambda > 1$ τότε:***

x	$-\infty$		ρ_1		ρ_2		$+\infty$
$\varphi(x)$		$+$	*0*	$-$	*0*	$+$	

- ***Αν*** $\lambda \in [0,\ 1] \Rightarrow \varphi(x) \geq 0, \quad \forall x \in IR.$

Συνεπώς, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι:

$$D_f = \begin{Bmatrix} (-\infty,\ \rho_1] \cup [\rho_2, +\infty) & \alpha\nu \quad \lambda < 0 \ \text{ή}\ \lambda > 1 \\ IR & \alpha\nu \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \end{Bmatrix}.$$

3. ***Δίδονται οι συναρτήσεις*** $f,\ \varphi\ :\ [-4,\ 4] \to IR \quad \mu\varepsilon \quad f(x) = x^2 + 4, \quad \varphi(x) = 4x.$

- ***Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και φ.***
- ***Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [-4,\ 4] - \{2\}$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της φ.***
- ***Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις $G_f,\ G_\varphi$ των συναρτήσεων f και φ στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.***

Λ ύ σ η:

- ***Τα κοινά σημεία των G_f και G_φ είναι οι λύσεις του συστήματος:***

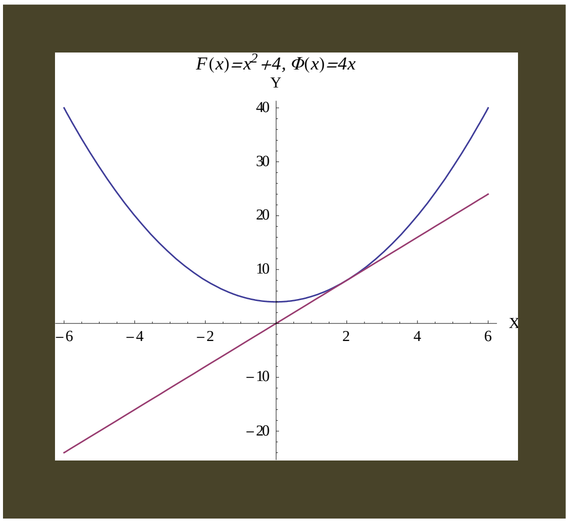
$$\begin{Bmatrix} y = f(x) \\ y = \varphi(x) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y = x^2 + 4 \\ y = 4x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x^2 + 4 = 4x \\ y = 4x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} (x-2)^2 = 0 \\ y = 4x \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x = 2 \\ y = 8 \end{Bmatrix}.$$

Άρα η τομή των γραμμών G_f και G_φ είναι το σημείο $P(2,\ 8)$.

- ***Είναι*** $f(x) > \varphi(x) \Leftrightarrow x^2 + 4 > 4x \Leftrightarrow (x-2)^2 > 0 \Leftrightarrow x \in IR - \{2\}.$

Άρα για κάθε $x \in IR - \{2\}$ η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της φ.

- ***Οι γραφικές παραστάσεις G_f και G_φ των συναρτήσεων f και φ φαίνονται στο διπλανό σχήμα.***



Θέματα για εξάσκηση (Οτιδήποτε μαθαίνουνε, το μαθαίνουμε κάνοντας το.)

1. ***Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:***

$$f(x) = -3x+1, \quad \varphi(x) = x^2 - 5x + 4 \quad \kappa\alpha\iota \quad h(x) = \frac{x}{x-2}.$$

2. ***Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:***

$$f(x) = \sqrt{x-1}, \quad \varphi(x) = \begin{Bmatrix} 2x-3 & \alpha\nu & x \geq 1 \\ 3x-4 & \alpha\nu & x < 1 \end{Bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad h(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

3. ***Να μελετήσετε ως προς τα ακρότατα τις συναρτήσεις:***

$$f(x) = 1 - |x|, \quad \varphi(x) = |2x-1|, \quad h(x) = x^2 + 4x + 3 \quad \kappa\alpha\iota \quad a(x) = -x^2 + 4x\,.$$

4. ***Όμοια, τις συναρτήσεις:***

$$f(x) = \frac{1}{x^2+4}, \quad \varphi(x) = 1 - \sqrt{x-2} \quad \kappa\alpha\iota \quad h(x) = x^2 + |x| - 2\,.$$

5. ***Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : (-2,3]$ με $f(x) = x^2 - 1$ είναι άρτια.***

6. ***Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές;***

$$f(x) = x^4 + |x|, \quad \varphi(x) = x^2 - x + 1, \quad h(x) = x^3 - x \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha(x) = \sqrt{|x| - 1}.$$

7. ***Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$ και ποιες έχουν κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων;***

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad \varphi(x) = \frac{|x|}{x^2 - 4}, \quad h(x) = \frac{\sqrt{x^2}}{x^2 - 3x + 2} \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}.$$