Γραμμικά Συστήματα

Γραμμικά Συστήματα 2Χ2

Ορισμός: ***Κάθε σύστημα της μορφής:***

$$(\Sigma)\ :\ \begin{cases} a_1x+\beta_1y=\gamma_1 \\ a_2x+\beta_2y=\gamma_2 \end{cases},\quad a_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ a_2,\ \beta_2,\gamma_2\in IR$$

ονομάζεται γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους (2Χ2).

Ορίζουσα των συντελεστών του συστήματος, συμβολικά $D=\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}$, ***λέγεται ο αριθμός:***

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & \beta_1 \\ a_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=a_1\beta_2-a_2\beta_1.$$

Την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αντικαθιστώντας τους συντελεστές a_1 ***και*** a_2 ***του x στις δύο εξισώσεις με τους αντίστοιχους σταθερούς όρους, την συμβολίζουμε με*** D_x. ***Είναι δηλαδή:***

$$D_x=\begin{vmatrix} \gamma_1 & \beta_1 \\ \gamma_2 & \beta_2 \end{vmatrix}=\gamma_1\beta_2-\gamma_2\beta_1.$$

Όμοια την ορίζουσα που προκύπτει από την D, αντικαθιστώντας τους συντελεστές β_1 ***και*** β_2 ***του y στις δύο εξισώσεις με τους αντίστοιχους σταθερούς όρους, την συμβολίζουμε με*** D_y. ***Είναι δηλαδή:***

$$D_y=\begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=\alpha_1\gamma_2-\alpha_2\gamma_1.$$

Λύση του γραμμικού 2Χ2 συστήματος:

- ***Αν*** $D\neq 0$ ***τότε το σύστημα*** (Σ) ***έχει μοναδική λύση, την:***

$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right).$$

- ***Αν*** $D=0$ ***και*** $D_x\neq 0$ ή $D_y\neq 0$ ***τότε το σύστημα*** (Σ) ***είναι αδύνατο.***
- ***Αν*** $D=D_x=D_y=0$ ***το σύστημα*** (Σ) ***είναι αόριστο, εκτός από την περίπτωση κατά την οποία:***

$$a_1=\beta_1=a_2=\beta_2=0\quad και\quad \gamma_1\neq 0\ \text{ή}\ \gamma_2\neq 0,$$

οπότε το σύστημα (Σ) ***είναι αδύνατο.***

Παρατήρηση: Από τις δύο τελευταίες περιπτώσεις διαπιστώνουμε ότι αν $D=0$, ***το σύστημα*** (Σ) ***είναι αδύνατο ή αόριστο.***

Γραφική λύση του γραμμικού 2Χ2 συστήματος:

Η γραφική λύση του γραμμικού 2Χ2 συστήματος δίνει την τομή των αντιστοίχων ευθειών. Έτσι,

- ***αν οι αντίστοιχες ευθείες τέμνονται σ' ένα σημείο $M(x_0, y_0)$, τότε το ζεύγος (x_0, y_0) είναι η λύση του συστήματος, δηλαδή: $(x, y) = (x_0, y_0)$.***
- ***αν οι αντίστοιχες ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα είναι αδύνατον, ενώ***
- ***αν οι αντίστοιχες ευθείες ταυτίζονται το σύστημα είναι αόριστο.***

Παράδειγμα 1:

Να λύσετε τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) \ : \ \begin{Bmatrix} 2x - y = 1 \\ x + 2y = 3 \end{Bmatrix}, \quad (\Sigma_2) \ : \ \begin{Bmatrix} 2x - y = 2 \\ 4x - 2y = 3 \end{Bmatrix} \quad \kappa\alpha\iota \quad (\Sigma_3) \ : \ \begin{Bmatrix} 3x - y = 2 \\ -9x + 3y = -6 \end{Bmatrix}.$$

Λύση:

Για το σύστημα (Σ_1) είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.2 - (-1).1 = 5 \neq 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \cdots = 5, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = 5.$$

Επομένως το σύστημα (Σ_1) έχει μοναδική λύση, την

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \cdots = (1, 1).$$

Για το σύστημα (Σ_2) έχουμε:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = \cdots = -1 \neq 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = -2 \neq 0$$

και επομένως είναι αδύνατον.

Αντίστοιχα για το σύστημα (Σ_3) είναι:

$$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -9 & -3 \end{vmatrix} = \cdots = 0,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{vmatrix} = \cdots = 0, \quad D_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -9 & -6 \end{vmatrix} = \cdots = 0.$$

Επειδή υπάρχει συντελεστής του συστήματος μη μηδενικός $(\pi.\chi \quad a_1 = 3 \neq 0)$, ***το σύστημα αυτό είναι αόριστο.***

Το σύστημα (Σ_3) ***απλούστερα γράφεται:***

$$(\Sigma_3) \; : \; \begin{Bmatrix} 3x - y = 2 \\ -9x + 3y = -6 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 3x - y = 2 \\ 3x - y = 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow y = 3x - 2.$$

Επομένως οι άπειρες λύσεις του δίδονται από την: $(x, y) = (x, 3x - 2), \;\; x \in IR.$

Παράδειγμα 2:

Να λύσετε το σύστημα:

$$(\Sigma) \; : \; \begin{Bmatrix} \lambda x + 2y = 4 \\ x + (\lambda - 1)y = \lambda \end{Bmatrix}, \quad \lambda \in IR.$$

Λύση:

Για το σύστημα (Σ) ***είναι:***

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & 2 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda + 1)(\lambda - 2),$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ \lambda & \lambda - 1 \end{vmatrix} = \cdots = 2(\lambda - 2), \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & 4 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \cdots = (\lambda - 2)(\lambda + 2).$$

Είναι $D = 0 \Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - 2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ ή $\lambda = 2.$

- ***Αν*** $\lambda \neq -1$ ***και*** $\lambda \neq 2 \Longrightarrow D \neq 0$ ***και επομένως το σύστημα έχει μοναδική λύση, την:***

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \cdots = \left(\frac{2}{\lambda + 1}, \frac{\lambda + 2}{\lambda + 1}\right)$$

- ***Αν*** $\lambda = -1 \Longrightarrow D = 0, \;\; D_x = -6 \neq 0$ ***οπότε το σύστημα είναι αδύνατον.***

- ***Αν*** $\lambda = 2 \Longrightarrow D = 0, \;\; D_x = 0, \;\; D_y = 0.$ ***Το σύστημα είναι αόριστο, αφού υπάρχει μη μηδενικός συντελεστής, και γράφεται:***

$$\begin{Bmatrix} 2x + 2y = 4 \\ x + y = 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow y = 2 - x, \quad x \in IR.$$

Οι άπειρες λύσεις του συστήματος είναι οι:

$$(x, y) = (x, 2 - x), \quad x \in IR.$$

Παράδειγμα 3:

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του $\lambda \in IR$ να λύσετε το σύστημα:

$$(\Sigma) : \begin{cases} \lambda x + \lambda^2 y = \lambda^3 \\ \lambda^2 x + \lambda(\lambda^2 - 1)y = 1 \end{cases}.$$

Λύση:

Για το σύστημα (Σ) είναι:

$$D = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ \lambda^2 & \lambda(\lambda^2 - 1) \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda^2,$$

$$D_x = \begin{vmatrix} \lambda^3 & \lambda^2 \\ 1 & \lambda(\lambda^2 - 1) \end{vmatrix} = \cdots = \lambda^2(\lambda^4 - \lambda^2 - 1), \quad D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^3 \\ \lambda^2 & 1 \end{vmatrix} = \cdots = \lambda(1 - \lambda^4).$$

Είναι $D = 0 \Leftrightarrow -\lambda^2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

- ***Αν $\lambda \neq 0 \Longrightarrow D \neq 0$. Συνεπώς το σύστημα έχει μοναδική λύση, την:***

$$(x, y) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_y}{D}\right) = \cdots = \left(-\lambda^4 + \lambda^2 + 1, \frac{\lambda^4 - 1}{\lambda}\right)$$

- ***Αν $\lambda = 0 \Longrightarrow D = 0$, $D_x = 0$ και $D_y = 0$.***

Για $\lambda = 0$ είναι και: $a_1 = \beta_1 = a_2 = \beta_2 = 0$, $\gamma_2 \neq 0$.

Επομένως το σύστημα είναι αδύνατον.

Ασκήσεις για εξάσκηση:

1. ***Να λύσετε τα συστήματα:***

$$(\Sigma_1) : \begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 3 \end{cases}, \quad (\Sigma_2) : \begin{cases} 2x - y = 4 \\ x - \dfrac{y}{2} = 2 \end{cases} \quad \text{και} \quad (\Sigma_3) : \begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 10 \end{cases}.$$

2. ***Γραμμικού συστήματος 2Χ2 οι ορίζουσες D, D_x και D_y επαληθεύουν την ισότητα:***

$$D^2 + D_x^2 + D_y^2 - 2D + 2D_x - 4D_y = -6.$$

Ποια είναι η λύση του συστήματος;

Γραμμικά Συστήματα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους.

Ορισμός: ***Κάθε σύστημα της μορφής:***

$$(\Sigma)\ :\ \begin{Bmatrix} a_1x+\beta_1y+\gamma_1\omega=\delta_1 \\ a_2x+\beta_2y+\gamma_2\omega=\delta_2 \\ a_2x+\beta_2y+\gamma_2\omega=\delta_2 \end{Bmatrix},\quad a_i,\ \beta_i,\ \gamma_i,\delta_i\ \in IR\ \ \text{για κάθε}\ \ i=1,2,3$$

ονομάζεται γραμμικό σύστημα τριών εξισώσεων με τρείς αγνώστους (3Χ3).

Λύση γραμμικού (3Χ3) συστήματος

Για την επίλυση του γραμμικού 3Χ3 συστήματος

- ***Λύνουμε μία των εξισώσεων ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στις άλλες δύο, οπότε προκύπτει γραμμικό 2Χ2 σύστημα, που λύνουμε κατά τα γνωστά.***
- ***Με την διαδικασία της απαλοιφής απαλείφουμε (μέθοδος αντίθετων συντελεστών) έναν άγνωστο από τις δύο των εξισώσεων, οπότε προκύπτει γραμμικό 2Χ2 σύστημα, που λύνουμε κατά τα γνωστά.***

Παράδειγμα 4:

Να λυθεί το σύστημα: $(\Sigma)\ :\ \begin{Bmatrix} 2x-y-\omega=0 \\ x+y+2\omega=4 \\ 3x+y-\omega=3 \end{Bmatrix}.$

Λύση:

Το σύστημα (Σ) ***ισοδύναμα γράφεται:***

$$\begin{Bmatrix} 2x-y-\omega=0 \\ x+y+2\omega=4 \\ 3x+y-\omega=3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \omega=2x-y \\ x+y+4x-2y=4 \\ 3x+y-2x+y=3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \omega=2x-y \\ 5x-y=4 \\ x+2y=3 \end{Bmatrix} \qquad (1).$$

Λύνουμε το γραμμικό 2Χ2 σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} 5x-y=4 \\ x+2y=3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=1 \\ y=1 \end{Bmatrix} \qquad (2),$$

οπότε από την $\omega=2x-y$ ***έχουμε:*** $\omega=1$.

Η λύση του συστήματος (Σ) ***είναι η:*** $(x,y,\omega)=(1,1,1)$.

Με την διαδικασία της απαλοιφής προσθέτουμε την πρώτη εξίσωση στην δεύτερη και την τρίτη και το σύστημα γράφεται:

$$(\Sigma)\ :\ \begin{Bmatrix} 2x-y-\omega=0 \\ x+y+2\omega=4 \\ 3x+y-\omega=3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x-y-\omega=0 \\ 3x+\omega=4 \\ 5x-2\omega=3 \end{Bmatrix}.$$

Λύνουμε κατά τα γνωστά το γραμμικό 2Χ2 σύστημα:

$$\begin{Bmatrix} 3x+\omega=4 \\ 5x-2\omega=3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x=1 \\ \omega=1 \end{Bmatrix},$$

οπότε από την $2x-y-\omega=0 \Longrightarrow y=1$.

Άρα η λύση του συστήματος είναι η: $(x,y,\omega)=(1,1,1)$.

Μη γραμμικά συστήματα

- *Αν η μια των εξισώσεων είναι γραμμική, την λύνουμε ως προς έναν άγνωστο και αντικαθιστούμε στην άλλη.*

Παράδειγμα 5:

Να λυθεί το σύστημα: $(\Sigma)\ :\ \begin{Bmatrix} x-y=2 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{Bmatrix}.$

Λύση:

Το σύστημα ισοδύναμα γράφεται:

$$\begin{Bmatrix} x-y=2 \\ x^2+y^2-2x=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=x-2 \\ x^2+(x-2)^2-2x=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=x-2 \\ 2x^2-6x+4=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=x-2 \\ x^2-3x+2=0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} y=x-2 \\ (x=1 \ \text{ ή } \ x=2) \end{Bmatrix}.$$

Επομένως οι λύσεις του συστήματος είναι: $(x,y)=(1,-1)$ ή $(x,y)=(2,0)$.

- ***Καμία των εξισώσεων δεν είναι γραμμική.***

Στην περίπτωση αυτή, με ισοδύναμους μετασχηματισμούς, προσπαθούμε να δημιουργήσουμε απλούστερο σύστημα.

Παράδειγμα 5:

Να λυθεί το σύστημα: $(\Sigma)\ :\ \left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ x^2+y^2=13 \end{matrix}\right\}.$

Λύση:

Το σύστημα (Σ) ***ισοδύναμα γράφεται:***

$$\left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ x^2+y^2=13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ (x+y)^2-2xy=13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ (x+y)^2=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ x+y=\pm 1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \ (\Sigma_1):\ \left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ x+y=1 \end{matrix}\right\} \ \text{ή}\ (\Sigma_2):\ \left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ x+y=-1 \end{matrix}\right\}.$$

Το σύστημα (Σ_1) ***γράφεται:***

$$\left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ x+y=1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ y=1-x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x(1-x)=-6 \\ y=1-x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2-x-6=0 \\ y=1-x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \cdots$$

και έχει τις λύσεις: $(x,y)=(3,-2)$ ή $(x,y)=(-2,3)$.

Όμοια, το σύστημα (Σ_2) ***γράφεται:***

$$\left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ x+y=-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ y=-1-x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x^2+x-6=0 \\ y=-1-x \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \cdots$$

και έχει τις λύσεις: $(x,y)=(2,-3)$ ή $(x,y)=(-3,2)$.

Παρατήρηση: ***Το σύστημα*** (Σ) ***μπορεί να λυθεί και ως εξής:***

$$\left\{\begin{matrix} xy=-6 \\ x^2+y^2=13 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2xy=-12 \\ x^2+y^2=13 \end{matrix}\right\} \overset{(\pm)}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{matrix} (x+y)^2=1 \\ (x-y)^2=25 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow$$

$$(\Sigma_1')\ :\ \left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ x-y=5 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x,y)=(3,-2) \quad \text{ή}$$

$$(\Sigma_2') \ : \ \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x,y)=(-2,3) \quad \text{ή}$$

$$(\Sigma_3') \ : \ \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x,y)=(2,-3) \quad \text{ή}$$

$$(\Sigma_4') \ : \ \begin{cases} x+y=-1 \\ x-y=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (x,y)=(-3,2).$$

Ασκήσεις για εξάσκηση:

1. Να λύσετε τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) \ : \ \begin{cases} 2x+y-\omega=-1 \\ x+2y+\omega=1 \\ x+y-\omega=-2 \end{cases}, \quad (\Sigma_2) \ : \ \begin{cases} 2x+y-\omega=-1 \\ x+2y+\omega=1 \\ x+y=-1 \end{cases} \ \kappa\alpha\iota \ (\Sigma_3) \ : \ \begin{cases} 2x+y-\omega=-1 \\ x+2y+\omega=1 \\ x+y=0 \end{cases}.$$

2. Όμοια, τα συστήματα:

$$(\Sigma_1) \ : \ \begin{cases} x-y=2 \\ x^2+x-2y=10 \end{cases}, \quad (\Sigma_2) \ : \ \begin{cases} xy=4 \\ x+y=-5 \end{cases} \ \kappa\alpha\iota \ (\Sigma_3) \ : \ \begin{cases} x^2-xy=0 \\ x^2+xy+y^2=9 \end{cases}.$$

3. Όμοια, τα:

$$(\Sigma_1) \ : \ \begin{cases} \dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{y}=4 \\ \dfrac{5}{x}+\dfrac{2}{y}=3 \end{cases}, \quad (\Sigma_2) \ : \ \begin{cases} \sqrt{x^2-6xy+9y^2}=4 \\ 2x+y=1 \end{cases} \ \kappa\alpha\iota \ (\Sigma_3) \ : \ \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5 \\ xy=36 \end{cases}.$$

4. Γραμμικού συστήματος 2Χ2 οι ορίζουσες D, D_x και D_y επαληθεύουν την ισότητα:

$$D^2+|D_x-1|+D_y^2=0.$$

Τι ισχύει σχετικά με την λύση του;