Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου - Ανισότητες - Ανισώσεις 1ου βαθμού

Η διάταξη στο σύνολο IR των πραγματικών αριθμών.

Ορισμοί: Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς x και ψ.

- Θα λέμε ότι ο αριθμός x είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό ψ, και θα γράφουμε τότε συμβολικά $x > \psi$, αν και μόνον αν η διαφορά $x - \psi$ είναι θετικός αριθμός.

  Δηλαδή: $x > \psi \Leftrightarrow x - \psi > 0$.

- Θα λέμε ότι ο αριθμός x είναι μικρότερος από τον αριθμό ψ, και θα γράφουμε τότε συμβολικά $x < \psi$, αν και μόνον αν η διαφορά $x - \psi$ είναι αρνητικός αριθμός.

  Δηλαδή: $x < \psi \Leftrightarrow x - \psi < 0$.

  Είναι φανερό ότι αν $x > \psi \Leftrightarrow x - \psi > 0 \Leftrightarrow -(x - \psi) < 0 \Leftrightarrow \psi - x < 0 \Leftrightarrow \psi < x$.

  Δηλαδή οι σχέσεις $x > \psi$ και $\psi < x$ είναι ισοδύναμες $(x > \psi \Leftrightarrow \psi < x)$.

- Θα λέμε ότι ο αριθμός x είναι μεγαλύτερος ή ίσος από τον αριθμό ψ, και θα γράφουμε τότε συμβολικά $x \geq \psi$, αν και μόνον αν η διαφορά $x - \psi$ είναι θετικός αριθμός ή ο μηδέν.

  Δηλαδή: $x \geq \psi \Leftrightarrow x - \psi \geq 0$.

  Αντίστοιχα, είναι: $x \leq \psi \Leftrightarrow x - \psi \leq 0$.

Συνέπειες από τους παραπάνω ορισμούς:

- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του μηδενός, δηλαδή: $x \in IR^{+} \Leftrightarrow x > 0$.
- Κάθε αρνητικός αριθμός είναι μικρότερος του μηδενός, δηλαδή: $x \in IR^{-} \Leftrightarrow x < 0$.
- Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος από οποιονδήποτε αρνητικό, δηλαδή αν:

$$x > 0 \;\; \text{και} \;\; \psi < 0 \Rightarrow x > \psi.$$

- Μεταξύ δύο αρνητικών αριθμών μεγαλύτερος είναι εκείνος με μικρότερη απόλυτη τιμή.

Προτάσεις επί των ανισοτήτων.

Θεωρούμε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, x ***και*** ψ.

Π_1: ***Αν στα μέλη ανισότητας προσθέσουμε ή αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:***

$$\text{Αν}\quad \alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha \pm x > \beta \pm x, \quad \text{ενώ}\ \ \text{αν}\quad \alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \pm x < \beta \pm x.$$

Θα αποδείξουμε για παράδειγμα ότι αν: $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha + x > \beta + x$.

Πράγματι: Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ *και*:

$$\alpha + x - (\beta + x) = \alpha + x - \beta - x = \alpha - \beta > 0 \Leftrightarrow \alpha + x > \beta + x.$$

Π_2: ***Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη ανισότητας με τον ίδιο θετικό αριθμό τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:***

$$\text{Αν}\ \ \{\alpha > \beta \ \ \text{και}\ \ x > 0\ \} \Rightarrow \alpha x > \beta x,\quad \frac{\alpha}{x} > \frac{\beta}{x}.$$

Θα αποδείξουμε για παράδειγμα ότι αν: $\alpha > \beta$ ***και*** $x > 0 \Rightarrow \alpha x > \beta x$.

Πράγματι: Αν $\alpha > \beta \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0$ *και*:

$$\alpha x - \beta x = x(\alpha - \beta) > 0 \Leftrightarrow \alpha x > \beta x.$$

Π_3: ***Αν οι πραγματικοί αριθμοί*** α ***και*** β ***είναι ομόσημοι και*** $\alpha < \beta$ ***τότε θα είναι και:***

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε την διαφορά:

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}=\frac{\beta-\alpha}{\alpha\beta} \qquad (1).$$

Είναι όμως:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha<\beta \\ \kappa\alpha\iota \\ \alpha,\ \beta\ \ o\mu\acute{o}\sigma\eta\mu o\iota \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \beta-\alpha>0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \alpha\beta>0 \end{matrix}\right\} \qquad (2).$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}.$$

Π_4: ***Αν πολλαπλασιάσουμε ή διαιρέσουμε τα μέλη ανισότητας με τον ίδιο αρνητικό αριθμό τότε προκύπτει ανισότητα με αντίθετη φορά. Δηλαδή:***

$$A\nu\ \ \{\alpha>\beta \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x<0\ \} \Rightarrow \alpha x<\beta x,\ \ \frac{\alpha}{x}<\frac{\beta}{x}.$$

Π_5: ***Αν προσθέσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ομοιόστροφες ανισότητες τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:***

$$A\nu\ \ \{\alpha>\beta \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x>\psi\ \} \Rightarrow \alpha+x>\beta+\psi \quad \acute{\eta} \quad \{\alpha<\beta \ \ \kappa\alpha\iota \ \ x<\psi\ \} \Rightarrow \alpha+x<\beta+\psi.$$

Θα αποδείξουμε για παράδειγμα ότι αν: $\alpha>\beta$ ***και*** $x>\psi \Rightarrow \alpha+x>\beta+\psi$.

Πράγματι: ***Αν*** $\alpha>\beta$ ***και*** $x>\psi \Leftrightarrow \alpha-\beta>0,\ \ x-\psi>0$ $\kappa\alpha\iota$:

$$\alpha+x-(\beta+\psi)=\alpha+x-\beta-\psi=(\alpha-\beta)+(x-\psi)>0 \Leftrightarrow \alpha+x>\beta+\psi.$$

Π_6: ***Αν*** $\{\alpha>\beta \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \beta>x\ \} \Rightarrow \alpha>x$ $\mapsto$ ***Μεταβατική Ιδιότητα***

Πράγματι: ***Αν*** $\alpha>\beta \ \ \kappa\alpha\iota \ \ \beta>x \Rightarrow \alpha+\beta>\beta+x \Rightarrow \alpha+\beta-\beta>\beta+x-\beta \Rightarrow \alpha>x.$

$\boldsymbol{\Pi_7}$: ***Αν πολλαπλασιάσουμε κατά μέλη δύο ή περισσότερες ομοιόστροφες ανισότητες, των οποίων τα μέλη είναι θετικά, τότε προκύπτει ανισότητα με την ίδια φορά. Δηλαδή:***

$$\boldsymbol{A\nu} \quad \boldsymbol{\alpha} > \beta > 0 \quad \boldsymbol{\kappa\alpha\iota} \quad \boldsymbol{x} > \psi > 0 \Rightarrow \boldsymbol{\alpha x} > \beta\psi.$$

Πράγματι: ***Αν*** $\boldsymbol{\alpha} > \beta$ $\boldsymbol{\kappa\alpha\iota}$ $\boldsymbol{x} > \psi \Leftrightarrow \alpha - \beta > 0, \quad \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\psi} > 0 \quad \kappa\alpha\iota$:

$$\boldsymbol{\alpha x} - \boldsymbol{\beta\psi} = \boldsymbol{\alpha x} - \boldsymbol{\alpha\psi} + \boldsymbol{\alpha\psi} - \boldsymbol{\beta\psi} = \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\psi}) + \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}) > 0 \Leftrightarrow \alpha x > \boldsymbol{\beta\psi}.$$

$\boldsymbol{\Pi_8}$: ***Το τετράγωνο και γενικότερα κάθε άρτια δύναμη οποιουδήποτε πραγματικού αριθμού είναι αριθμός <u>μη αρνητικός</u>[1], δηλαδή:***

$\boldsymbol{\Gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon}\ \ \boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{IR}\ \ \boldsymbol{\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota}$: $\boldsymbol{\alpha^2 \geq 0}$ $\boldsymbol{\kappa\alpha\iota}$ $\boldsymbol{\alpha^{2\nu} \geq 0}$, $\boldsymbol{\nu} \in \boldsymbol{N}$. ***Η ισότητα ισχύει μόνον όταν*** $\boldsymbol{\alpha = 0}$.

Συνέπεια αυτής της ιδιότητας είναι η πρόταση:

Αν για τους πραγματικούς $\boldsymbol{\alpha}$ $\boldsymbol{\kappa\alpha\iota}$ $\boldsymbol{\beta}$ $\boldsymbol{\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota}$ $\boldsymbol{\alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta = 0}$.

[1] *Δηλαδή θετικός ή μηδέν*

Λυμένα Θέματα:

1. ***Έστω πραγματικός αριθμός $\alpha < -2$. Με βάση ποιες ιδιότητες τις διάταξης στο IR αποδεικνύεται ότι:***

$$2\alpha + 1 < -3 \quad (1) \quad -3\alpha - 4 > 2 \quad (2) \quad \text{και} \quad -2(\alpha - 1) + 4 > 10 \quad (3);$$

Λύση:

Είναι:

- $\alpha < -2 \Leftrightarrow 2\alpha < -4$ $\mapsto$ ***Πολλαπλασιασμός των μελών της $\alpha < -2$ με το $2 > 0$.***

  Η $2\alpha < -4 \Leftrightarrow 2\alpha + 1 < -3$ $\mapsto$ ***Στα μέλη της $2\alpha < -4$ προσθέτουμε το 1.***

  Επομένως: $\alpha < -2 \Leftrightarrow 2\alpha + 1 < -3$.

- ***Όμοια έχουμε:***

$$\alpha < -2 \overset{\times(-3)}{\Leftrightarrow} -3\alpha > 6 \overset{+(-4)}{\Leftrightarrow} -3\alpha - 4 > 2 \qquad \text{και:}$$

- $\alpha < -2 \overset{+(-1)}{\Leftrightarrow} \alpha - 1 < -3 \overset{\times(-2)}{\Leftrightarrow} -2(\alpha - 1) > 6 \overset{+(+4)}{\Leftrightarrow} -2(\alpha - 1) + 4 > 10.$

2. ***Αν οι πραγματικοί αριθμοί α και β είναι ομόσημοι και $\alpha < \beta$ τότε θα είναι και:***

$$\frac{1}{\alpha} > \frac{1}{\beta}.$$

Απόδειξη:

Θεωρούμε την διαφορά:

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\beta} \qquad (1).$$

Είναι όμως:

$$\left\{\begin{matrix} \alpha<\beta \\ \kappa\alpha\iota \\ \alpha,\ \beta\ \ \text{ομόσημοι} \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \beta-\alpha>0 \\ \kappa\alpha\iota \\ \alpha\beta>0 \end{matrix}\right\} \qquad (2).$$

Από τις (1) και (2) έχουμε:

$$\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\beta}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}>\frac{1}{\beta}.$$

3. ***Αν*** $\alpha\ ,\beta \in IR,\quad \alpha<\beta$ ***να δείξετε ότι:***

$$\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta \qquad (1).$$

Απόδειξη:

Είναι: $\alpha<\beta \Leftrightarrow \alpha-\beta<0$ *και:*

$$\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{2\alpha-\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}\overset{\alpha-\beta<0}{<}0 \Leftrightarrow \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2} \qquad (1') \quad \kappa\alpha\iota$$

$$\frac{\alpha+\beta}{2}-\beta=\frac{\alpha+\beta-2\beta}{2}=\frac{\alpha-\beta}{2}\overset{\alpha-\beta<0}{<}0 \Leftrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2}<\beta \qquad (1'').$$

Από τις $(1')$ ***και*** $(1'') \Rightarrow$

$$\Rightarrow \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta \qquad (1).$$

4. ***Αν*** $\alpha,\ \beta,\ x,\ \psi > \in IR,\quad \alpha<\beta$ ***και*** $x>\psi$ ***δείξτε ότι:*** $\alpha-x<\beta-\psi.$

Απόδειξη:

Είναι: $\alpha<\beta$ ***και*** $x>\psi \Leftrightarrow \alpha-\beta<0,\quad \psi-x<0 \qquad (1)$ ***και:***

$$\alpha-x-(\beta-\psi)=\alpha-x-\beta+\psi=(\alpha-\beta)+(\psi-x)\overset{(1)}{<}0.$$

5. ***Αν $2<\alpha<6$, $4<\beta<8$ να βρείτε μεταξύ ποίων αριθμών μεταβάλλονται οι παραστάσεις:***

$$\boldsymbol{\Pi_1=\alpha-\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_2=2\alpha-3\beta;}$$

Λύση:

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix}2<\alpha<6\\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\\ 4<\beta<8\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}2<\alpha<6\\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\\ -8<-\beta<-4\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}-6<\alpha-\beta<2 \qquad (1), \quad \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}$$

$$\left\{\begin{matrix}2<\alpha<6\\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\\ 4<\beta<8\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}4<2\alpha<12\\ \boldsymbol{\kappa\alpha\iota}\\ -24<-3\beta<-12\end{matrix}\right\}\overset{(+)}{\Rightarrow}-20<2\alpha-3\beta<0 \qquad (2),$$

6. ***Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β είναι:***

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha^2+\beta^2\geq -2\alpha\beta.}$$

Απόδειξη:

Θα αποδείξουμε ότι η διαφορά των αριθμών $\alpha^2+\beta^2$ και $2\alpha\beta$ είναι αριθμός μη αρνητικός.

Πράγματι:

$$\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta=(\alpha-\beta)^2\geq 0\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2\geq 2\alpha\beta \qquad (1).$$

Η ισότητα στην (1) ισχύει προφανώς όταν $(\alpha-\beta)^2=0\Leftrightarrow \alpha=\beta$.

Όμοια, είναι:

$$\alpha^2+\beta^2-(-2\alpha\beta) = \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta = (\alpha+\beta)^2\geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-(-2\alpha\beta)\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2\geq -2\alpha\beta \qquad (2).$$

Η ισότητα στην (2) ισχύει προφανώς όταν $(\alpha+\beta)^2=0\Leftrightarrow \alpha=-\beta$.

7. Δείξτε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α και β να δείξετε ότι:

$$2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2.$$

Απόδειξη:

Είναι:

$$2(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)^2 = 2\alpha^2+2\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2 = \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(\alpha^2+\beta^2)-(\alpha+\beta)^2 = (\alpha-\beta)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2(\alpha^2+\beta^2) \geq (\alpha+\beta)^2 \quad (1).$$

Είναι φανερό ότι η ισότητα στην (1) ισχύει όταν $(\alpha-\beta)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta$.

8. Δείξτε ότι για οποιονδήποτε αριθμό $\alpha \in IR$ δείξτε ότι:

$$Αν \ \ \alpha>0 \Rightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha} \geq 2 \quad ενώ \ αν \quad \alpha<0 \Rightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha} \leq -2.$$

Απόδειξη:

Έστω $\alpha>0$. Είναι τότε:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}-2 = \frac{\alpha^2+1-2\alpha}{\alpha} = \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} \geq 0 \Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha}-2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha} \geq 2 \quad (1).$$

Η ισότητα στην (1) ισχύει όταν: $(\alpha-1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=1$.

Όμοια, αν $\alpha<0$ τότε:

$$\alpha+\frac{1}{\alpha}-(-2) = \cdots = \frac{(\alpha+1)^2}{\alpha} \leq 0 \Leftrightarrow \alpha+\frac{1}{\alpha} \leq -2 \quad (2).$$

Η ισότητα στην (2) ισχύει όταν: $(\alpha+1)^2=0 \Leftrightarrow \alpha=-1$.

Ανισώσεις 1ου βαθμού:

Η γενική μορφή ανισώσεων πρώτου βαθμού είναι η: $\alpha x > \beta$ ***ή*** $\alpha x < \beta$, $\alpha, \beta \in IR$.

Τα συμπεράσματα που αφορούν τη λύση της $\alpha x > \beta$, $\alpha, \beta \in IR$ (1).

- ***Αν*** $\alpha > 0$ ***το σύνολο λύσεων της*** (1) ***αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς*** x ***για τους οποίους:*** $x > \dfrac{\beta}{a}$.
- ***Αν*** $\alpha < 0$ ***το σύνολο λύσεων της*** (1) ***αποτελείται από τους πραγματικούς αριθμούς*** x ***για τους οποίους:*** $x < \dfrac{\beta}{a}$.
- ***Αν*** $\alpha = 0$ ***τότε η ανίσωση*** (1) ***είναι αδύνατη ή αόριστη.***

Παράδειγμα 1ο:

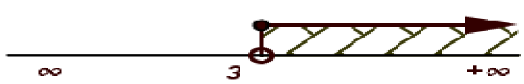
Να λύσετε τις ανισώσεις:

$$1 + x < 2(x-1) \quad (1), \quad 2(3x-1) - 5x < x \quad (2), \quad \frac{x-1}{2} + \frac{x}{3} \leq \frac{x+1}{4} - \frac{1}{6} \quad (3).$$

Λύση:

Η ανίσωση (1) ***ισοδύναμα γράφεται:***

$$1 + x < 2(x-1) \Leftrightarrow 1 + x < 2x - 2 \Leftrightarrow -x < -3 \Leftrightarrow x > \frac{-3}{-1} \Leftrightarrow x > 3.$$



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική λύση της ανίσωσης.

Σημειώνεται ότι ο αριθμός 3 ***δεν αποτελεί λύση της ανίσωσης.***

Όμοια, η (2) γράφεται:

$$2(3x-1)-5x<x \Leftrightarrow 6x-2-5x<x \Leftrightarrow 0.x<2,$$

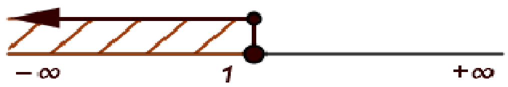
που αληθεύει για κάθε $x \in IR$.

Είναι επίσης:

$$\frac{x-1}{2}+\frac{x}{3} \le \frac{x+1}{4}-\frac{1}{6} \Leftrightarrow 12.\frac{x-1}{2}+12.\frac{x}{3} \le 12.\frac{x+1}{4}-12.\frac{1}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1)+4x \le 3(x+1) \Leftrightarrow 6x-6+4x \le 3x+3-2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 7x \le 7 \Leftrightarrow x \le 1.$$



Η γραφική λύση της ανίσωσης φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο αριθμός 1 αποτελεί λύση της ανίσωσης για αυτό και το αντίστοιχο σημείο είναι γεμάτο.

Παράδειγμα 2ο:

Να λύσετε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:

$$3+x<3(x-1) \quad (1) \qquad και \qquad 2(x-1)+x \le 13 \quad (2).$$

Ποιες είναι οι κοινές <u>ακέραιες</u> λύσεις των ανισώσεων (1) και (2);

Λύση:

Η ανίσωση (1) γράφεται:

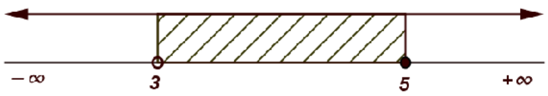
$$3+x<3(x-1) \Leftrightarrow 3+x<3x-3 \Leftrightarrow x-3x<-3-3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2x<-6 \Leftrightarrow x>3 \qquad (1').$$

Όμοια, η (2) γράφεται:

$$2(x-1)+x \leq 13 \Leftrightarrow 2x-2+x \leq 13 \Leftrightarrow 3x \leq 15 \Leftrightarrow x \leq 5 \qquad (2')$$

Συνεπώς οι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) είναι:



Οι πραγματικοί αριθμοί οι μεγαλύτεροι του 3 και μικρότεροι ή ίσοι του 5, δηλαδή: $3 < x \leq 5$.

Οι μοναδικοί ακέραιοι που είναι μεγαλύτεροι του 3 και ταυτόχρονα μικρότεροι ή ίσοι του 5 είναι οι 4 και 5. Επομένως οι κοινές ακέραιες λύσεις των (1) και (2) είναι οι ακέραιοι αριθμοί 4 και 5.

Παράδειγμα 3ο:

Να λύσετε τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης:

$$x^2-4 < (x-2)^2 \leq x^2+12 \qquad (1).$$

Λύση:

Η ανίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\{x^2-4 < (x-2)^2 \quad (1') \quad \text{και} \quad (x-2)^2 \leq x^2+12 \quad (2')\}.$$

Είναι επομένως ένα σύστημα ανισώσεων και γι' αυτό θα βρούμε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων $(1')$ και $(2')$.

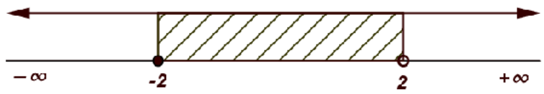
Η ανίσωση $(1')$ γράφεται:

$$x^2-4 < (x-2)^2 \Leftrightarrow x^2-4 < x^2-4x+4 \Leftrightarrow 4x < 8 \Leftrightarrow x < 2.$$

Όμοια, η $(2')$ γράφεται:

$$(x-2)^2 \leq x^2+12 \Leftrightarrow x^2-4x+4 \leq x^2+12 \Leftrightarrow -4x \leq 8 \Leftrightarrow x \geq -2.$$

Οι κοινές λύσεις των $(1')$ και $(2')$ είναι οι αριθμοί που είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι του -2 και ταυτόχρονα μικρότεροι του 2.



Επομένως οι ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1) είναι οι αριθμοί: $-2, -1,\ 0$ και 1.

Παράδειγμα 4ο:

Η αντοχή μιας γέφυρας είναι $20tn$. Ένα φορτηγό έχει απόβαρο $12tn$. Το φορτηγό αυτό πρόκειται να φορτωθεί με κιβώτια που ζυγίζουν $50Kg$ το καθένα. Πόσα το πολύ κιβώτια μπορούμε να φορτώσουμε στο φορτηγό αυτό ώστε να περάσει με ασφάλεια από την παραπάνω γέφυρα;

Λύση:

Υποθέτουμε ότι το φορτηγό θα φορτωθεί με $n - \text{στο πλήθος κιβώτια}$, όπου $n \in N$. Το συνολικό βάρος του φορτηγού θα είναι τότε:

$$W = (12000+50x)Kg \qquad (1).$$

Για να περάσει το φορτηγό τη γέφυρα με ασφάλεια, πρέπει το συνολικό του βάρος να είναι μικρότερο ή ίσον του ορίου αντοχής της, δηλαδή των $20tn = 20.000Kg$.

Άρα: $12000+50x \leq 20000 \Leftrightarrow 50x \leq 8000 \Leftrightarrow x \leq 160.$

Μπορούμε επομένως να φορτώσουμε το φορτηγό με 160 το πολύ κιβώτια.

Ασκήσεις για λύση:

1. ***Αν*** $3 < \alpha < 9,\ -4 < \beta < -1$ ***να βρείτε μεταξύ ποίων αριθμών μεταβάλλονται οι παραστάσεις:***

$$\Pi_1 = \alpha - \beta \quad \text{και} \quad \Pi_2 = 2\alpha + \beta;$$

2. ***Μια πλευρά τριγώνου έχει μήκος*** $4cm$. ***Για το εμβαδόν*** E ***του τριγώνου δίδεται ότι:*** $8cm^2 \le E \le 24cm^2$. ***Μεταξύ ποίων τιμών μεταβάλλεται το ύψος του τριγώνου που αντιστοιχεί στην πλευρά των*** $4cm$;

3. ***Οι διαστάσεις*** $x,\ y$ ***ορθογωνίου παραλληλογράμμου μεταβάλλονται ως ακολούθως:***

$$1 \le x \le 4 \quad \text{και} \quad 2 \le y \le 6.$$

Μεταξύ ποίων τιμών μεταβάλλονται:

- ***Η περίμετρος*** S ***του ορθογωνίου και***
- ***Το εμβαδόν του*** E;

4. ***Αν*** $\alpha,\ \beta \in IR$ ***να δείξετε ότι:***

$$(\alpha+\beta)^2 \ge 4\alpha\beta \quad (1) \quad \text{και} \quad 5(\alpha+\beta)^2 \ge (\alpha+2\beta)^2 \quad (2).$$

Πότε ισχύει η ισότητα στις ανισότητες (1) ***και*** (2);

5. ***Να λύσετε τις ανισώσεις:***

$$0.x < 1,\ \ 0.x \le 2,\quad 0.x < -1,\quad 0.x > 0,\quad \kappa\alpha\iota\quad 0.x \ge 0.$$

6. ***Όμοια, τις ανισώσεις:***

$$\frac{2x-1}{2} + 2\frac{x}{3} \le \frac{2x+1}{4} - \frac{1}{6}\quad (1)\quad \kappa\alpha\iota\quad x - \frac{x+1}{2} + \frac{x+2}{3} < \frac{x-1}{5}\quad (2).$$

7. ***Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων:***

$$2(x+1) - x \ge 8\quad (1)\quad \kappa\alpha\iota\quad x - 2(x+1) + 3(x+2) \le 16\quad (2).$$

8. ***Να βρείτε τις κοινές ακέραιες λύσεις των ανισώσεων:***

$$x^2 - 1 < (x+1)^2\quad (1)\quad \kappa\alpha\iota\quad 2(x+1) - 9 \le 12 - 3x\quad (2).$$

9. ***Να λύσετε την ανίσωση:***

$$1 < x + \frac{x-1}{2} \le \frac{x+2}{3}.$$

10. ***Η παρακάτω ανίσωση έχει άγνωστο τον x.***

$$\kappa x \ge 2017 - x\quad (1),\ \ \kappa\ \pi\rho\alpha\gamma\mu\alpha\tau\iota\kappa\acute{o}\varsigma\ \alpha\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma.$$

- ***Να θέσετε την ανίσωση αυτή στην μορφή:*** $\alpha x \ge \beta$.
- ***Να λύσετε την*** (1) ***για*** $\kappa = -2,\ \ \kappa = 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \kappa = 2016$.

- *Μπορείτε να βρείτε πότε η $(\mathbf{1})$ είναι αδύνατη;*

- *Από τι εξαρτώνται οι λύσεις της $(\mathbf{1})$;*

11. *Να συμπληρώσετε τα κενά έτσι ώστε η παρακάτω πρόταση να είναι αληθής:*

$$\boldsymbol{Αν}\;\; \mathbf{0^\circ < \theta < 90^\circ}\;\; \boldsymbol{τότε}: \quad \cdots\cdots < \boldsymbol{\eta\mu\,\theta} < \cdots\cdots$$

Αν είναι γνωστό ότι για μια γωνία με μέτρο $\boldsymbol{\theta}$ είναι:

$$\mathbf{0^\circ < \theta < 90^\circ} \quad (\mathbf{1}) \quad \boldsymbol{και} \quad \boldsymbol{\eta\mu\,\theta} = \frac{\boldsymbol{\alpha - 1}}{\mathbf{2}} \quad (\mathbf{2}),\;\; \boldsymbol{\alpha\ πραγματικός\ αριθμός},$$

μπορείτε να βρείτε μεταξύ ποίων τιμών μεταβάλλεται ο αριθμός α;

Αν υποτεθεί ότι ο αριθμός α είναι ακέραιος, μπορείτε να βρείτε ποιος είναι;

Στην περίπτωση αυτή ποιο είναι το μέτρο $\boldsymbol{\theta}$ της γωνίας;