Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου: Εξισώσεις

Α. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου Βαθμού

Ως εξισώσεις 1ου βαθμού χαρακτηρίζονται εξισώσεις της μορφής: $\alpha x = \beta$ ή $\alpha x + \beta = 0$.

Τα συμπεράσματα που αφορούν την λύση της εξίσωσης $\alpha x = \beta$ (1).

Αν $\alpha \neq 0$ η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση, την $x = \dfrac{\beta}{\alpha}$.

Αν $\alpha = 0$ η εξίσωση (1) είναι αδύνατη ή αόριστη. Συγκεκριμένα:

- Αν $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$ είναι αδύνατη, ενώ:
- Αν $\alpha = 0$ και $\beta = 0$ είναι αόριστη ή ταυτότητα.

Παράδειγμα 1ο:

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$3(x-1) = x-3, \quad x + 3(2x-1) = 7(x+1) \quad \text{και} \quad 2(x-1) + 3(x+1) = 5x+1.$$

Λύση:

Η εξίσωση $3(x-1) = x-3$ ***γράφεται:***

$$3(x-1) = x-3 \Leftrightarrow 3x-3 = x-3 \Leftrightarrow 3x - x = 3-3 \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{0}{2} \Leftrightarrow x = 0.$$

Όμοια, $x + 3(2x-1) = 7(x+1) \Leftrightarrow x + 6x - 3 = 7x + 7 \Leftrightarrow 7x - 7x = 7 + 3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 0x = 10, \quad \text{που είναι αδύνατη} \quad \text{και}:$$

$$2(x-1) + 3(x+1) = 5x+1 \Leftrightarrow 2x - 2 + 3x + 3 = 5x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x - 5x = 1 + 2 - 3 \Leftrightarrow 0x = 0, \quad \text{που είναι αόριστη}.$$

Παράδειγμα 2ο:

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\frac{x-1}{2}-\frac{5x-2}{3}=\frac{x-7}{6} \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{4}=\frac{x-3}{6}+\frac{x-4}{12} \quad (2).$$

Λύση:

Η εξίσωση (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\frac{x-1}{2}-\frac{5x-2}{3}=\frac{x-7}{6} \Leftrightarrow 6.\frac{x-1}{2}-6.\frac{5x-2}{3}=6.\frac{x-7}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1-2(5x-2)=x-7 \Leftrightarrow x-1-10x+4=x-7 \Leftrightarrow -9x+3=x-7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -9x-x=-7-3 \Leftrightarrow -10x=-10 \Leftrightarrow x=1.$$

Όμοια, η εξίσωση (2) γράφεται:

$$\frac{x-1}{2}-\frac{x-2}{4}=\frac{x-3}{6}+\frac{x-4}{12} \Leftrightarrow 12.\frac{x-1}{2}-12.\frac{x-2}{4}=12.\frac{x-3}{6}+12.\frac{x-4}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(x-1)-3(x-2)=2(x-3)+x-4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x-6-3x+6=2x-6+x-4 \Leftrightarrow 3x=3x-10 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0.x=-10 \quad \text{που είναι αδύνατη.}$$

Παράδειγμα 3ο:

Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα: $\frac{1}{x-2}$.

Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση: $\frac{1}{x-2}=4 \quad (1).$

Ποια είναι η λύση της (1) στο σύνολο Z των ακεραίων;

Λύση:

Ένα κλάσμα ορίζεται όταν ο παρανομαστής του είναι διάφορος του μηδενός. Επομένως για να ορίζεται το παραπάνω κλάσμα πρέπει να είναι:

$$x-2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2.$$

Για κάθε $x\neq 2$ η εξίσωση:

$$\frac{1}{x-2}=4 \Leftrightarrow 1=4(x-2) \Leftrightarrow 1=4x-8 \Leftrightarrow -4x=-8-1 \Leftrightarrow -4x=-9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}.$$

Η λύση $x=\frac{9}{4}$ είναι αποδεκτή, αφού επαληθεύει τον περιορισμό $x\neq 2$.

Η εξίσωση (1) είναι αδύνατη στο σύνολο Z των ακεραίων, αφού η λύση της $x=\frac{9}{4}\notin Z$.

Παράδειγμα 4ο:

Έπιπλο υπολογιστή πουλήθηκε μαζί με τον αναλογούντα $Φ.Π.Α$ αντί του ποσού των $226€$. Αν ο συντελεστής $Φ.Π.Α$ ήταν 23% ποια ήταν η καθαρή αξία του επίπλου αυτού;

Λύση:

Έστω x η καθαρή αξία του επίπλου. Ο αγοραστής πλήρωσε την καθαρή αξία x του επίπλου αυτού συν τον αναλογούντα $Φ.Π.Α$, που είναι ίσος με:

$$\frac{23}{100}.x=0.23x.$$

Άρα:

$$x+0.23x=226 \Leftrightarrow 1.23x=226 \Leftrightarrow x=\frac{226}{1.23}=200€.$$

Δηλαδή, η καθαρή αξία του επίπλου ήταν: $200€$.

Παράδειγμα 5ο:

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$x^2+x=2 \qquad (1) \quad και \quad x^3+2=2x^2+x \qquad (2).$$

Λύση:

Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2+x=2 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x^2+2x-x-2=0 \Leftrightarrow \left(x^2-x\right)+(2x-2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)+2(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} x-1=0 \\ ή \\ x+2=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x=-2.$$

Όμοια, η (2) γράφεται:

$$x^3+2=2x^2+x \Leftrightarrow x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x\left(x^2-1\right)-2\left(x^2-1\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2-1\right)(x-2)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=\pm 1 \quad ή \quad x=2.$$

Παράδειγμα 6ο:

Να λύσετε την εξίσωση: $4x^3+1=3x \quad (1)$ ***στα σύνολα:*** $IR,\ Q,\ Z$ ***και*** N.

Λύση:

Η εξίσωση (1) γράφεται: $4x^3+1=3x \Leftrightarrow 4x^3-3x+1=0 \Leftrightarrow 4x^3-4x+x+1=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow (2x-1)^2(x+1)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2} \quad διπλή\ ρίζα \quad ή \quad x=-1.$$

Η λύση της (1) στο σύνολο IR και το Q είναι: $x=\frac{1}{2}$ ***διπλή ρίζα ή*** $x=-1$.

Η λύση της (1) στο σύνολο Z των ακεραίων είναι η $x=-1$.

Η (1) είναι αδύνατη στο N, αφού καμία από τις λύσεις της δεν είναι φυσικός αριθμός.

Β. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου Βαθμού

Η γενική μορφή εξισώσεων 2ου βαθμού είναι: $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0,\ \ \alpha,\ \beta,\ \gamma\in IR,\ \ \alpha\neq 0\ \ (1).$

Ο αριθμός $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$ ***λέγεται διακρίνουσα της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.***

Τα συμπεράσματα που αφορούν την λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης.

Το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης (1) ***εξαρτάται από το πρόσημο της διακρίνουσας της*** Δ. ***Συγκεκριμένα:***

- ***Αν*** $\Delta>0$ ***η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες, που δίδονται από τους τύπους:***

$$x_1=\frac{-\beta+\sqrt{\Delta}}{2\alpha},\quad x_2=\frac{-\beta-\sqrt{\Delta}}{2\alpha}.$$

Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***παραγοντοποιείται και γράφεται:***

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_1)(x-x_2).$$

- ***Αν*** $\Delta=0$ ***η δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές ίσες, ή διαφορετικά διπλή πραγματική ρίζα, που δίδεται από τον τύπο:***

$$x_0=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

Τότε το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***παραγοντοποιείται και γράφεται:***

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=\alpha(x-x_0)^2=\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2.$$

- ***Αν*** $\Delta<0$ ***η δευτεροβάθμια εξίσωση είναι αδύνατη στο*** IR, ***δηλαδή δεν έχει πραγματικές ρίζες. Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο*** $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ ***δ έ ν παραγοντοποιείται.***

Σημείωση: ***Για την εύρεση των ριζών της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ή του αντιστοίχου τριωνύμου απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή στον προσδιορισμό των συντελεστών*** α, β ***και*** γ ***της εξίσωσης ή του τριωνύμου. Τονίζεται ότι:***

- ***Η δευτεροβάθμια εξίσωση ή το αντίστοιχο τριώνυμο πρέπει να είναι γραμμένο κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του αγνώστου και υπό την προϋπόθεση αυτήν:***
- ***Το*** α ***είναι ο συντελεστής του δευτεροβάθμιου όρου, το*** β ***είναι ο συντελεστής του πρωτοβάθμιου όρου ενώ το*** γ ***ο σταθερός όρος.***
- ***Εάν η εξίσωση είναι ελλιπής[1] ο αντίστοιχος συντελεστής είναι μηδέν.***

Παράδειγμα 1ο:

Έστω οι εξισώσεις: $3x-2=x^2 \quad (1)$ ***και*** $x^2=x \quad (2)$.

Στις εξισώσεις αυτές ο μεγαλύτερος εκθέτης του αγνώστου x ***είναι το*** 2. ***Συνεπώς οι εξισώσεις αυτές είναι 2ου βαθμού. Για την επίλυση τους επομένως πρέπει να έλθουν στην μορφή:***

$$\alpha x^2+\beta x+\gamma=0.$$

Έτσι η εξίσωση (1) ***γράφεται:***

$$3x-2=x^2 \Leftrightarrow 3x-2-x^2=0 \Leftrightarrow -x^2+3x-2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \qquad (1').$$

Είναι επομένως: $\alpha=1,\ \beta=-3$ ***και*** $\gamma=2$. ***Άρα*** $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-3)^2-4.1.2=1>0.$

[1] *Δηλαδή στερείται κάποιου όρου*

Συνεπώς η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες, τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) + \sqrt{1}}{2.1} = 2, \quad x_2 = \frac{-(-3) - \sqrt{1}}{2.1} = 1.$$

Όμοια, η εξίσωση (2) ισοδύναμα γράφεται:

$$x^2 = x \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \qquad (2').$$

Επομένως είναι: $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = 0$ ***και*** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4.1.0 = 1 > 0.$

Δηλαδή η εξίσωση (2) έχει δύο ρίζες πραγματικές άνισες, τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-1) + \sqrt{1}}{2.1} = 1, \quad x_2 = \frac{-(-1) - \sqrt{1}}{2.1} = 0.$$

Παρατήρηση: Πολυωνυμικές εξισώσεις που στερούνται σταθερού όρου, έχουν ρίζα το 0 και αντίστροφα.

<u>Παράδειγμα 2ο:</u>

Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$x^2 + 5x = -6 \quad (1), \quad 4x^2 - 4x + 1 = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad x^2 - x + 1 = 0 \quad (3).$$

Στη συνέχεια να παραγοντοποιήσετε τα αντίστοιχα τριώνυμα.

Λύση:

Η εξίσωση (1) γράφεται:

$$x^2 + 5x = -6 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \qquad (1').$$

Είναι δε: $\alpha = 1,\ \beta = 5,\ \gamma = 6.$ ***Άρα:*** $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \cdots = 1 > 0.$

Επομένως έχει δύο ρίζες πραγματικές - άνισες, τις:

$$x_1 = \frac{-\beta + \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-5 + \sqrt{1}}{2.1} = -2, \quad x_2 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2.1} = -3.$$

Το τριώνυμο $x^2 + 5x + 6$ *παραγοντοποιείται και γράφεται:*

$$x^2 + 5x + 6 = 1.(x+2)(x+3) = (x+2)(x+3).$$

Όμοια, για την εξίσωση (2) *είναι:* $\alpha = 4,\ \beta = -4,\ \gamma = 1.$ *Άρα* $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \cdots = 0.$

Συνεπώς η εξίσωση (2) *έχει διπλή πραγματική ρίζα την:*

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{-4}{2.4} = \frac{1}{2}.$$

Το τριώνυμο $4x^2 - 4x + 1$ *παραγοντοποιείται και γράφεται:*

$$4x^2 - 4x + 1 = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = 2^2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \left[2.\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]^2 = (2x-1)^2.$$

Τέλος, για την εξίσωση $x^2 - x + 1 = 0$ *είναι:* $\alpha = 1,\ \beta = -1,\ \gamma = 1.$

Άρα $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = \cdots = -3 < 0.$ *Επομένως η εξίσωση* (3) *είναι αδύνατη στο* IR *και το αντίστοιχο τριώνυμο* $x^2 - x + 1$ *__δ ε ν__ παραγοντοποιείται.*

__Παράδειγμα 3ο:__

Δίδονται τα κλάσματα:

$$K_1 = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3} \quad (1) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad K_2 = \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 1} \quad (2).$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in IR$ ορίζονται τα παραπάνω κλάσματα και στη συνέχεια να τα απλοποιήσετε.

Λύση:

- ***Είναι:*** $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 3$.

Επομένως το κλάσμα K_1 ***ορίζεται όταν:*** $x \neq 1$ ***και*** $x \neq 3$.

Για κάθε $x \neq 1$ ***και*** $x \neq 3$ ***είναι:***

$$K_1 = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 - 4x + 3} = \frac{(x-3)^2}{(x-1)(x-3)} = \frac{x-3}{x-1}.$$

Όμοια, είναι:

$$4x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2}.$$

$\textit{Άρα το κλάσμα } K_2 \textit{ ορίζεται όταν: } x \neq \pm\frac{1}{2}.$

$\textit{Για κάθε } x \neq \pm\frac{1}{2} \textit{ είναι:}$

$$K_2 = \frac{4x^2 - 4x + 1}{4x^2 - 1} = \frac{(2x-1)^2}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{2x-1}{2x+1}.$$

Ασκήσεις για λύση:

1. **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

$$0x = 1, \quad 0x = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad 2 - (1 - 3x) = x.$$

2. **Όμοια, τις εξισώσεις:**

$$\frac{x-1}{2} - \frac{x+1}{3} = 1 - \frac{x-3}{6} \quad \kappa\alpha\iota \quad 2(x-1) - x = x + 3.$$

3. **Όμοια, τις:**

$$3\left(x - \frac{1}{3}\right) + x = 4(x+3) - 13, \quad (x-2)^2 - x = (x+1)^2 - 7\left(x - \frac{3}{7}\right).$$

4. **Να βρείτε για ποιες τιμές το x ορίζονται τα παρακάτω κλάσματα:**

$$\frac{1}{x-2}, \quad \frac{2}{x+1}, \quad \frac{5}{x-3} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{x}{2x-7}.$$

Στη συνέχεια να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\frac{1}{x-2} = 4, \quad \frac{2}{x+1} = -1, \quad \frac{5}{x-3} = \frac{1}{2} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{x}{2x-7} = -2.$$

5. **Δίδεται η εξίσωση: $\kappa x - 2 = x \quad (1)$ με άγνωστο x και κ πραγματική μεταβλητή.**

- **Να θέσετε την εξίσωση (1) στην μορφή $\alpha x = \beta$.**
- **Να λύσετε την εξίσωση (1) όταν: $\kappa = -1, \ 0, \ 1, \ 2$.**
- **Υπάρχει τιμή του κ για την οποία η εξίσωση (1) είναι αόριστη;**
- **Μπορείτε να βρείτε αμέσως τη λύση της (1) για $\kappa = 3$;**
- **Από ποιόν αριθμό εξαρτάται κάθε φορά η λύση της εξίσωσης;**
- **Μπορείτε να διατυπώσετε γενικά συμπεράσματα που αφορούν τη λύση της (1);**

6. ***Δίδονται οι εξισώσεις:***

$$\alpha x = -2 \quad (1) \quad \text{και} \quad \alpha x = \alpha - 2 \quad (2), \quad \alpha \in IR.$$

Υπάρχουν τιμές του α για τις οποίες:

- ***Η εξίσωση (1) είναι αδύνατη;***
- ***Η εξίσωση (2) είναι αδύνατη;***
- ***Η εξίσωση (1) έχει μοναδική λύση;***
- ***Η εξίσωση (1) είναι αόριστη;***
- ***Η εξίσωση (2) είναι αόριστη***

7. ***Μία γωνία ισοσκελούς τριγώνου έχει μέτρο $70°$. Να βρείτε τις άλλες του γωνίες.***

Να σκεφτείτε πρώτα πόσες και ποιες περιπτώσεις πρέπει να μελετήσετε.

Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα αν η δοσμένη γωνία του τριγώνου είχε μέτρο $120°$. Πόσες είναι τώρα οι περιπτώσεις που θα μελετήσετε;

8. ***Να λύσετε τις εξισώσεις:***

$$x^2 + 3x + 2 = 0 \quad (1), \quad (x+1)^2 = 6x - 3 \quad (2) \quad \text{και} \quad x^3 - 12x + 16 = 0 \quad (3).$$

9. ***Να λύσετε χρησιμοποιώντας την διακρίνουσα τις παρακάτω εξισώσεις 2ου βαθμού:***

$$x^2 + 5 = 6x, \quad x^2 = 4x, \quad x^2 - 10x + 25 = 0 \quad \text{και} \quad x^2 - x + 1 = 0.$$

10. ***Όμοια, τις εξισώσεις:***

$$2x^2 + 5 = 7x, \quad x^2 = 4x + 12, \quad 9x^2 + 12x + 4 = 0 \quad \textit{και} \quad 2x^2 + 2 = x.$$

Ποια είναι η λύση των εξισώσεων αυτών στα σύνολα Q, Z ***και*** N***;***

11. ***Σε πρωτάθλημα αγώνων ποδοσφαίρου διεξήχθησαν συνολικά*** 90 ***αγώνες. Στο πρωτάθλημα αυτό κάθε ομάδα έπαιξε με όλους τους αντιπάλους της εντός και εκτός έδρας. Πόσες ήταν οι ομάδες που συμμετείχαν στο πρωτάθλημα αυτό;***

12. ***Οι διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαφέρουν κατά*** 2. ***Αν το εμβαδόν του είναι*** $48m^2$ ***να βρείτε τις διαστάσεις του, τη διαγώνιο του και την περίμετρο του.***

13. ***Δίδονται τα κλάσματα:***

$$K_1 = \frac{-9x^2 + 6x - 1}{9x^2 - 1} \quad (1) \qquad \textit{και} \qquad K_2 = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + 2x - 3} \quad (2).$$

Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in IR$ ***ορίζονται τα παραπάνω κλάσματα και στη συνέχεια να τα απλοποιήσετε.***

14. ***Δίδεται ότι το τριώνυμο*** $\varphi(x) = 3x^2 + 2x + a, \ a \in IR$ ***έχει ρίζα τον αριθμό*** 1.

- ***Να βρείτε την τιμή του*** α.
- ***Να απλοποιήσετε το κλάσμα:***

$$K = \frac{3x^2 + 2x + a}{x^2 - 1}.$$