Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου - Παραγοντοποίηση

Όταν λέμε να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο εννοούμε να το μετατρέψουμε σε γινόμενο παραγόντων. Για να παραγοντοποιήσουμε ένα πολυώνυμο εξετάζουμε κατά σειρά:

- ***Αν υπάρχει κοινός παράγοντας σε όλους τους όρους της παράστασης που θα παραγοντοποιήσουμε.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:***

$$\Pi(x) = ax + a\psi + \alpha\omega - 2\alpha \,.$$

Λύση:

Η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi = ax + a\psi + \alpha\omega - 2\alpha = \alpha(x + \psi + \omega - 2).$$

- ***Αν η παράσταση που θα παραγοντοποιηθεί είναι ταυτότητα.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:***

$$\Pi_1 = x^2 - 4a^2 \quad \kappa\alpha\iota \quad \Pi_2 = x^2 - 6ax + 9a^2.$$

Λύση:

Η παράσταση Π_1 γράφεται:

$$\Pi_1 = x^2 - 4a^2 = x^2 - (2a)^2 = (x - 2a)(x + 2a).$$

Όμοια, η Π_2 γράφεται:

$$\Pi_2 = x^2 - 6ax + 9a^2 = x^2 - 2.x.3a + (3a)^2 = (x - 3a)^2.$$

- ***Αν ομαδοποιώντας τους όρους της παράστασης η παράσταση παραγοντοποιείται.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε την παράσταση:***

$$\Pi = ax - ay + \beta x - \beta y.$$

Λύση:

Η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi = ax - ay + \beta x - \beta y = (ax - ay) + (\beta x - \beta y) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi = a(x - y) + \beta(x - y) = (x - y)(a + \beta).$$

- ***Μήπως διασπώντας κάποιον όρο του πολυωνύμου σε δύο ή περισσότερους όρους μπορούμε να το παραγοντοποιήσουμε.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο:***

$$\Pi = x^2 - 5x + 6.$$

Λύση:

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κάποιος ότι ακολουθώντας μια από τις παραπάνω μεθόδους δεν θα πετύχουμε να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση Π. Γι' αυτό γράφουμε:

$$\Pi = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2x - 3x + 6 = \left(x^2 - 2x\right) - (3x - 6) = x(x - 2) - 3(x - 2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi = (x - 2)(x - 3).$$

- ***Μήπως εκτελώντας πράξεις και κάνοντας νέα ομαδοποίηση μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε την παράσταση μας.***

Παράδειγμα: ***Να παραγοντοποιήσετε το πολυώνυμο:***

$$\Pi = y(x + a) - y^2 - ax.$$

Λύση:

Καμία από τις παραπάνω μεθόδους δεν μπορεί να δώσει απάντηση στο πρόβλημα της παραγοντοποίησης του πολυωνύμου Π. Γι' αυτό γράφουμε:

$$\Pi = y(x+a) - y^2 - ax = xy + ay - y^2 - ax \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Pi = (xy - ax) - (y^2 - ay) = x(y-a) - y(y-a) = (y-a)(x-y).$$

Λυμένα Παραδείγματα:

1. ***Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:***

$$\Pi_1 = 2xy - xy^2 + x^2, \quad \Pi_2 = 2x^3y^2a - 4y^3a^2x + 2a^3x^2y$$

Λύση:

Είναι: $\Pi_1 = 2xy - xy^2 + x^2 = x(2y - y^2 + x)$ ***και***

$$\Pi_2 = 2x^3y^2a - 4y^3a^2x + 2a^3x^2y = 2xya(x^2y - 2y^2a + a^2x).$$

2. ***Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις:***

$$\Pi_1 = 4x^2 + 12xy + 9y^2, \quad \Pi_2 = 2xy - y^2 - x^2,$$

$$\Pi_3 = 4x^2 - 9, \quad \Pi_4 = x^2 - 6xy + 9y^2 - 4,$$

$$\Pi_5 = 1 + 2xy - y^2 - x^2 \quad \text{και} \quad \Pi_6 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3.$$

Λύση:

Έχουμε: $\Pi_1 = 4x^2 + 12xy + 9y^2 = (2x)^2 + 2.2x.3y + (3y)^2 = (2x+3y)^2,$

$$\Pi_2 = 2xy - y^2 - x^2 = -(x^2 + y^2 - 2xy) = -(x-y)^2,$$

$$\Pi_3 = 4x^2 - 9 = (2x)^2 - 3^2 = (2x-3)(2x+3),$$

$$\Pi_4 = x^2 - 6xy + 9y^2 - 4 = (x-3y)^2 - 2^2 = (x-3y+2)(x-3y-2)$$

$$\Pi_5 = 1 + 2xy - y^2 - x^2 = 1 - (x^2 + y^2 - 2xy) = 1 - (x - y)^2 = (1 + x - y)(1 - x + y),$$

$$\Pi_6 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3 = x^3 - 3x^2.2y + 3x(2y)^2 - (2y)^3 = (x - 2y)^3.$$

3. Όμοια, τις παραστάσεις:

$$\Pi_1 = \alpha x^4 - \alpha, \quad \Pi_2 = \alpha x^5 - x a^5,$$

$$\Pi_3 = x^3 - 4x \quad \text{και} \quad \Pi_4 = x^2(\alpha - \beta) - \alpha + \beta.$$

Λύση:

Έχουμε: $\Pi_1 = \alpha x^4 - \alpha = \alpha(x^4 - 1) = \alpha(x^2 + 1)(x^2 - 1) = \alpha(x^2 + 1)(x + 1)(x - 1),$

$$\Pi_2 = \alpha x^5 - x a^5 = x a(x^4 - a^4) = x a(x^2 + a^2)(x^2 - a^2) = x a(x^2 + a^2)(x + a)(x - a),$$

$$\Pi_3 = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x - 2)(x + 2),$$

$$\Pi_4 = x^2(\alpha - \beta) - \alpha + \beta = x^2(\alpha - \beta) - (\alpha - \beta) = (\alpha - \beta)(x^2 - 1) = (\alpha - \beta)(x + 1)(x - 1).$$

4. Όμοια, τις παραστάσεις:

$$\Pi_1 = x^2 + \alpha y + \beta x + \alpha\beta, \quad \Pi_2 = x^3 + x^2 - 4 - 4x \quad \text{και} \quad \Pi_3 = \alpha\beta(x^2 + y^2) - xy(\alpha^2 + \beta^2).$$

Λύση:

Η παράσταση Π_1 γράφεται:

$$\Pi_1 = x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = (x^2 + \alpha x) + (\beta x + \alpha\beta) = x(x + \alpha) + \beta(x + \alpha) = (x + \alpha)(x + \beta).$$

Όμοια, είναι:

$$\Pi_2 = x^3 + x^2 - 4 - 4x = (x^3 + x^2) - (4x + 4) = x^2(x + 1) - 4(x + 1) = (x + 1)(x^2 - 4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi_2 = (x + 1)(x - 2)(x + 2) \quad \text{και}$$

$$\Pi_3 = \alpha\beta(x^2 + y^2) - xy(\alpha^2 + \beta^2) = \alpha\beta x^2 + \alpha\beta y^2 - xy\alpha^2 - xy\beta^2 =$$

$$= (\alpha\beta x^2 - xy\alpha^2) - (xy\beta^2 - \alpha\beta y^2) = \alpha x(\beta x - \alpha y) - \beta y(\beta x - \alpha y) = (\beta x - \alpha y)(\alpha x - \beta y).$$

5. Όμοια, την παράσταση: $\Pi = x^3 - 3x + 2$.

Λύση:

Η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi = x^3 - 3x + 2 = x^3 - x - 2x + 2 = \left(x^3 - x\right) - (2x - 2) =$$

$$= x\left(x^2 - 1\right) - 2(x - 1) = x(x - 1)(x + 1) - 2(x - 1) =$$

$$= (x - 1)[x(x + 1) - 2] = (x - 1)\left(x^2 + x - 2\right) = (x - 1)\left(x^2 + x - 1 - 1\right) =$$

$$= (x - 1)\left[\left(x^2 - 1\right) + (x - 1)\right] = (x - 1)[(x + 1)(x - 1) + (x - 1)] =$$

$$= (x - 1)(x - 1)(x + 1 + 1) = (x - 1)^2(x + 2).$$

6. Όμοια, την παράσταση: $\Pi = x^3(y - a) + y^3(a - x) + a^3(x - y)$.

Στη συνέχεια να απλοποιήσετε το κλάσμα:

$$K = \frac{x^3(y - a) + y^3(a - x) + a^3(x - y)}{x^2 + ay - xy - ax}$$

Λύση:

Η παράσταση Π γράφεται:

$$\Pi = x^2(y - a) + y^2(a - x) + a^2(x - y) = x^2(y - a) + y^2a - y^2x + a^2x - a^2y =$$

$$= x^2(y - a) + \left(y^2a - a^2y\right) - \left(y^2x - a^2x\right) = x^2(y - a) + ay(y - a) - x\left(y^2 - a^2\right) =$$

$$= x^2(y - a) + ay(y - a) - x(y - a)(y + a) = (y - a)\left[x^2 + ay - x(y + a)\right] =$$

$$= (y - a)\left(x^2 + ay - xy - ax\right) = (y - a)\left[\left(x^2 - xy\right) - (ax - ay)\right] =$$

$$= (y - a)[x(x - y) - a(x - y)] = (y - a)(x - y)(x - a).$$

Το κλάσμα K γράφεται:

$$K = \frac{x^3(y - a) + y^3(a - x) + a^3(x - y)}{x^2 + ay - xy - ax} = \frac{(y - a)(x - y)(x - a)}{(x - y)(x - a)} = y - a.$$

Ασκήσεις προς λύση.

1. **Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:**

- $\Pi_1 = x^2 + 6x\psi + 9\psi^2$, $\Pi_2 = 4x^2 - 4x + 1$ και $\Pi_3 = x^4 + 2x^2\psi^2 + \psi^4$
- $\Pi_1 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$, $\Pi_2 = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$, $\Pi_3 = x^3 - 6x^2\psi + 12x\psi^2 - 8\psi^3$
- $\Pi_1 = x^2 - 9\psi^2$, $\Pi_2 = 1 - x^2$, $\Pi_3 = 16 - 25x^2$ και $\Pi_4 = x^4 - 2x^2\psi^2 + \psi^4$
- $\Pi_1 = x^4 - 1$, $\Pi_2 = 81 - 16x^4$, $\Pi_3 = 16 - x^4$ και $\Pi_4 = x^4 - 16\psi^4$.

2. **Όμοια, τις παραστάσεις:**

- $\Pi_1 = \kappa^2 + \lambda^2 + 2\kappa\lambda + 4\kappa + 4\lambda + 4$ και $\Pi_2 = \kappa^2 + 4\lambda^2 - 4\kappa\lambda + 2\kappa - 4\lambda + 1$
- $\Pi_1 = x^3 + 8$, $\Pi_2 = 8x^3 + 1$, $\Pi_3 = x^3 + 64\psi^3$ και $\Pi_4 = 8x^6 + 27\psi^6$
- $\Pi_1 = 64x^3 - 1$, $\Pi_2 = x^3 - 8\psi^3$, $\Pi_3 = 8x^3 - 27\psi^3$ και $\Pi_4 = x^6 - 8\psi^6$
- $\Pi_1 = \alpha x + \alpha\psi + \alpha\omega$, $\Pi_2 = \alpha x^2 - 9\alpha\psi^2$ και $\Pi_3 = \alpha x^2 + 4\alpha x\psi + 4\psi^2 - \alpha$
- $\Pi_1 = \alpha x - 2\alpha\psi + 2\kappa x - 4\lambda\psi$, $\Pi_2 = x + 3\psi - 4\alpha x - 12\alpha\psi$, $\Pi_3 = x + \psi - \kappa x - \kappa\psi$
- $\Pi_1 = \kappa x^2 + 2\kappa x\psi + \kappa\psi^2$, $\Pi_2 = \lambda x^2 - 4\lambda x + 4\lambda$ και $\Pi_3 = \alpha x^3 - 3\alpha x^2 + 3\alpha x - \alpha$
- $\Pi_1 = x^2\alpha + \beta - \alpha - \beta x^2$, $\Pi_2 = \lambda^2\alpha + \beta\lambda + \lambda\alpha + \alpha\beta$, $\Pi_3 = 6x^2 - 3\kappa^2 x - 4\kappa^3 + 8\kappa x$
- $\Pi_1 = x^3 + x^2 + x + 1$ και $\Pi_2 = x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.

3. **Να παραγοντοποιήσετε επίσης τις παραστάσεις**

- $\Pi_1 = x\psi(\alpha^2 + \beta^2) + \alpha\beta(x^2 + \psi^2)$ και $\Pi_2 = x^2(\psi - \omega) + \psi^2(\omega - x) + \omega^2(x - \psi)$
- $\Pi_1 = x^2(\psi + \omega) + \psi^2(\omega + x) + \omega^2(x + \psi) + 2x\psi\omega$ και $\Pi_2 = x^3 - 3x^2 + 2$.

4. ***Όμοια, τις παραστάσεις:***

- $\Pi_1 = \left(x^2 + \psi^2 - \alpha^2 - \beta^2\right)^2 - 4(\alpha x + \beta\psi)^2, \quad \Pi_2 = x^2 - 2x\psi - 2x\omega + \psi^2 + \omega^2 + 2x\psi - 1$
- $\Pi = x^2\psi + \psi^2\omega + \omega^2 x - x\psi^2 - \psi\omega^2 - \omega x^2$
- $\Pi = \alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta\gamma(\beta + \gamma) + \gamma\alpha(\gamma + \alpha)$
- $\Pi = x^3(\psi - \omega) + \psi^3(\omega - x) + \omega^3(x - \psi)$
- $\Pi = (x + \psi)^2(x - \psi) + (\psi + \omega)^2(\psi - \omega) + (\omega + x)^2(\omega - x)$
- $\Pi_1 = x^4 + 4\psi^4 - 12x^2\psi^2 \quad \text{και} \quad \Pi_2 = x^4 - \psi^4 + x\psi^9 - \psi x^9.$

5. ***Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:***

$$K_1 = \frac{x^2 - 9\psi^2}{x - 3\psi}, \quad K_2 = \frac{x^5 - 1}{x - 1}, \quad K_3 = \frac{x^2 - 3x - 2}{x^2 - 1} \quad \text{και} \quad K_4 = \frac{x^3 + \psi^3}{x^3 - \psi^3 - 2x\psi(x - \psi)}.$$

6. ***Να βρείτε τα εξαγόμενα:***

$$\Pi_1 = \frac{x}{(x - \psi)(x - \omega)} + \frac{\psi}{(\psi - \omega)(\psi - x)} + \frac{\omega}{(\omega - x)(\omega - \psi)}$$

7. ***Αν*** $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$ ***να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:***

$$\Pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \Pi_2 = \frac{2\alpha - \beta}{\alpha + 2\beta}, \quad \Pi_3 = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta}, \quad \Pi_4 = \frac{\alpha - 3\beta}{\alpha + 3\beta} \quad \text{και} \quad \Pi_5 = \frac{3\alpha - \beta}{\beta}.$$