Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου - Η έννοια της ταυτότητας

Ορισμός: ***Ταυτότητα ονομάζουμε κάθε ισότητα δύο αλγεβρικών παραστάσεων οι οποίες καθίστανται αριθμητικά ίσες για κάθε επιτρεπτή[1] τιμή των μεταβλητών της.***

Παράδειγμα 1ο: ***Οι παρακάτω ισότητες:***

$$\mathbf{0.x = 0}, \quad \mathbf{x + y - (x - y) = 2y}, \quad \mathbf{x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)}$$

είναι ταυτότητες στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, αφού αληθεύουν για οποιεσδήποτε πραγματικές τιμές των μεταβλητών τους.

Παράδειγμα 2ο: ***Οι ισότητες:***

$$\mathbf{2x = 1} \qquad \text{και} \qquad \mathbf{x^2 - 2 = x(x - 1)}$$

δ έ ν ***είναι ταυτότητες στο IR, αφού για παράδειγμα:***

- ***Η ισότητα $2x = 1$ για $x = 0 \in IR \Rightarrow 2.0 = 1$, αδύνατον, ενώ η***
- ***Ισότητα $x^2 - 2 = x(x - 1)$ για $x = 0 \Rightarrow -2 = 0$, αδύνατον.***

Σημείωση: ***Οι παραπάνω ισότητες $2x = 1$ και $x^2 - 2 = x(x - 1)$ δεν είναι ταυτότητες στο IR, είναι όμως εξισώσεις σ' αυτό, με λύσεις αντίστοιχα, τις:***

$$x = \frac{1}{2} \qquad \text{και} \qquad x = 2.$$

---

[1] *Δηλαδή για κάθε τιμή από το κοινό σύνολο ορισμού των δύο παραστάσεων.*

Βασικές ταυτότητες: ***Ταυτότητες η αλήθεια των οποίων θεωρείται δεδομένη ονομάζονται βασικές ταυτότητες. Μερικές εξ' αυτών είναι οι παρακάτω:***

Για κάθε $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in IR$ ***είναι:***

- $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2$ $\mapsto$ ***Τετράγωνο αθροίσματος***
- $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2$ $\mapsto$ ***Τετράγωνο διαφοράς***
- $(\alpha+\beta)^3=\alpha^3+3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2+\beta^3$ $\mapsto$ ***Κύβος αθροίσματος***
- $(\alpha-\beta)^3=\alpha^3-3\alpha^2\beta+3\alpha\beta^2-\beta^3$ $\mapsto$ ***Κύβος διαφοράς***
- $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$ $\mapsto$ ***Διαφορά Τετραγώνων***
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)\left(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\right)$ $\mapsto$ ***Άθροισμα Κύβων***
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)\left(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\right)$ $\mapsto$ ***Διαφορά Κύβων***
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$ $\mapsto$ ***Τετράγωνο τριωνύμου***

Απόδειξη Ταυτότητας: ***Γα να αποδείξουμε την αλήθεια μιας ταυτότητας ακολουθούμε κάποιον από τους επόμενους τρόπους:***

- ***Ξεκινάμε συνήθως από το πολυπλοκότερο[2] μέλος της και με κατάλληλους αντιστρεπτούς μετασχηματισμούς καταλήγουμε στο άλλο.***

  Παράδειγμα: ***Αν*** $\alpha,\ \beta \in IR$ ***να δείξετε ότι:*** $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \quad (1).$

  Απόδειξη:

  Το πρώτο μέλος της (1) ***σύμφωνα με τον ορισμό της δύναμης γράφεται:***

$$(\alpha+\beta)^2=(\alpha+\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2+\alpha\beta+\beta\alpha+\beta^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2.$$

[2] *Δηλαδή αυτό στο οποίο σημειώνονται περισσότερες και πολυπλοκότερες πράξεις.*

- ***Κάνουμε πράξεις ή μετασχηματίζουμε τα μέλη A και B της ταυτότητας $A = B$ επιδιώκοντας να καταλήξουμε στο συμπέρασμα:***

$$A = \Pi \quad \text{και} \quad B = \Pi$$

οπότε τελικά έχουμε $A = B$.

Παράδειγμα: ***Για κάθε $\alpha \in IR$ να δείξετε την αλήθεια της ταυτότητας:***

$$\left(\frac{\alpha^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2 + \alpha^2 \qquad (1).$$

Απόδειξη:

Το πρώτο μέλος της (1) γράφεται:

$$\left(\frac{\alpha^2+1}{2}\right)^2 = \frac{(\alpha^2)^2 + 2\alpha^2.1 + 1^2}{2^2} = \frac{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1}{4} \qquad (1').$$

Αντίστοιχα, είναι:

$$\left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2 + \alpha^2 = \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1}{4} + \alpha^2 = \frac{\alpha^4 - 2\alpha^2 + 1 + 4\alpha^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2 + \alpha^2 = \frac{\alpha^4 + 2\alpha^2 + 1}{4} \qquad (1'').$$

Από τις $(1')$ και $(1'')$, αφού τα δεύτερα μέλη τους είναι ίσα, έχουμε:

$$\left(\frac{\alpha^2+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\alpha^2-1}{2}\right)^2 + \alpha^2.$$

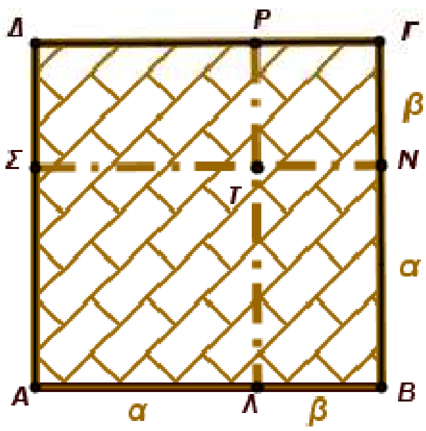
Σημειώνεται ***ότι υπάρχουν και άλλοι τρόποι για να αποδείξουμε την αλήθεια μιας ταυτότητας, που δεν θα μας απασχολήσουν στο κείμενο αυτό, αφού υπερβαίνουν τις απαιτήσεις της τάξης.***

Εμβαδόν και Ταυτότητες:

Το τετράγωνο που ακολουθεί έχει πλευρά $x = \alpha + \beta$ και τα σημεία Λ και N έχουν κατασκευαστεί έτσι ώστε να είναι:

$$(A\Lambda) = \alpha,\ (\Lambda B) = \beta \quad \kappa\alpha\iota \quad (BN) = \alpha,\ (N\Gamma) = \beta.$$

Αρχείο: GG-Taytothtes.ggb



Από τα σημεία Λ και N έχουμε κατασκευάσει τα τμήματα $\Lambda P \perp AB$ και $N\Sigma \perp B\Gamma$.

Είναι τότε:

$$(\Gamma P) = \beta, \quad (P\Delta) = \alpha,\ (\Delta\Sigma) = \beta \quad \kappa\alpha\iota \quad (\Sigma A) = \alpha.$$

Τα σχήματα $A\Lambda T\Sigma$ και $TN\Gamma P$ είναι τετράγωνα με πλευρά α και β αντίστοιχα. Επίσης τα σχήματα ΛBNT και $P\Delta\Sigma T$ είναι ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α και β.

Το εμβαδόν του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι το άθροισμα των εμβαδών των τετραγώνων $A\Lambda T\Sigma$ και $TN\Gamma P$ και των δύο ορθογωνίων παραλληλογράμμων ΛBNT και $P\Delta\Sigma T$.

Επομένως:

$$(AB\Gamma\Delta) = (A\Lambda T\Sigma) + (TN\Gamma P) + (\Lambda BNT) + (P\Delta\Sigma T) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \alpha\beta + \alpha\beta \ \Rightarrow \ (\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2.$$

Λυμένα Παραδείγματα:

1. **Να εξετάσετε αν η ισότητα:**

$$(x-\psi)^2 = x^2 - \psi^2, \qquad x,\ \psi \in IR \qquad (1)$$

είναι ταυτότητα.

Λύση:

Η (1) για[3] $x=-1,\ \psi=1 \Rightarrow (-1-1)^2 = (-1)^2 - 1^2 \Rightarrow 4=0,\quad \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o\nu.$

Επομένως η ισότητα (1) δεν είναι ταυτότητα στο IR.

2. **Να εξετάσετε αν η ισότητα:**

$$2(x+\psi)-(x-\psi) = x+3\psi, \qquad x,\ \psi \in IR \qquad (1)$$

είναι ταυτότητα στο IR.

Λύση:

Η ισότητα (1) γράφεται:

$$2(x+\psi)-(x-\psi) = x+3\psi \Leftrightarrow 2x+2\psi-x+\psi = x+3\psi \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+3\psi = x+3\psi$$

η οποία προφανώς και είναι αληθής για κάθε $x,\ \psi \in IR$.

Συνεπώς η (1) είναι ταυτότητα στο IR.

3. **Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β είναι:**

$$\alpha^2 - \alpha\beta = \alpha\beta - \beta^2 \qquad (1).$$

να δείξετε ότι: $\alpha = \beta$.

Απόδειξη:

Η (1) ισοδύναμα γράφεται:

$$\alpha^2 - \alpha\beta = \alpha\beta - \beta^2 \Leftrightarrow \alpha^2 - \alpha\beta - \alpha\beta + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha-\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta.$$

---

[3] *Για να αποδείξουμε ότι μια ισότητα __δ έ ν__ είναι ταυτότητα, αρκεί να βρούμε τιμές για τις μεταβλητές της για τις οποίες δεν ισχύει. Με αυτήν την λογική έγινε η επιλογή των τιμών $x=-1$ και $\psi=1$.*

4. Να βρείτε τα αναπτύγματα:

- $(\alpha-4\beta)^2=\cdots,\qquad \left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\cdots$
- $(2\alpha-\beta)^3=\cdots,\qquad (3\alpha+\beta)^3=\cdots$

Λύση:

Σύμφωνα με τα παραπάνω είναι:

- $(\alpha-4\beta)^2=\alpha^2-2.\alpha.4\beta+(4\beta)^2=\alpha^2-8\alpha\beta+16\beta^2$ ***και***

$$\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+2.\alpha.\frac{1}{\alpha}+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2=\alpha^2+2+\frac{1}{\alpha^2}.$$

- $(2\alpha-\beta)^3=(2\alpha)^3-3.(2\alpha)^2.\beta+3.(2\alpha).\beta^2-\beta^3=8\alpha^3-3.4\alpha^2.\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3\Rightarrow$

$$(2\alpha-\beta)^3=8\alpha^3-12\alpha^2\beta+6\alpha\beta^2-\beta^3 \quad \textit{και}$$

$$(3\alpha+\beta)^3=(3\alpha)^3+3.(3\alpha)^2.\beta+3.(3\alpha).\beta^2+\beta^3=27\alpha^3+27\alpha^2\beta+9\alpha\beta^2+\beta^3.$$

5. Να βρείτε τα εξαγόμενα:

- $(\alpha-2\beta)(2\beta+\alpha)$ ***και*** $(-\alpha-3\beta)(\alpha-3\beta)$
- $(\alpha+2\beta)^2-(\alpha-2\beta)^2+(4\beta-\alpha)(\alpha+4\beta)+2\alpha^2$

Λύση:

Οι δοσμένες παραστάσεις γράφονται:

- $(\alpha-2\beta)(2\beta+\alpha)=(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)=\alpha^2-(2\beta)^2=\alpha^2-4\beta^2$ ***και***

$$(-\alpha-3\beta)(\alpha-3\beta)=-(\alpha+3\beta)(\alpha-3\beta)=-\left[\alpha^2-(3\beta)^2\right]=-\left(\alpha^2-9\beta^2\right)=9\beta^2-\alpha^2.$$

- $(\alpha+2\beta)^2-(\alpha-2\beta)^2+(4\beta-\alpha)(\alpha+4\beta)+2\alpha^2=$

$$=\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-\left(\alpha^2-4\alpha\beta+4\beta^2\right)+(4\beta-\alpha)(4\beta+\alpha)+2\alpha^2=$$

$$=\alpha^2+4\alpha\beta+4\beta^2-\alpha^2+4\alpha\beta-4\beta^2+16\beta^2-\alpha^2+2\alpha^2=\alpha^2+8\alpha\beta+16\beta^2=(\alpha+4\beta)^2.$$

6. ***Αν*** $\alpha, \beta, \gamma \in IR$ ***να δείξετε ότι:***

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta \qquad (1),$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta) \qquad (2),$$

$$(\alpha+\beta)^2+\alpha^2+\beta^2=2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2) \qquad (3),$$

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha=\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right] \qquad (4).$$

Απόδειξη:

Είναι γνωστό ότι: $(\alpha+\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$

ή διαφορετικά, $(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta=\alpha^2+\beta^2.$

Όμοια, $(\alpha-\beta)^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \Rightarrow \alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta.$

Για την απόδειξη της (3) ***παίρνουμε το πρώτο μέλος της εκτελούμε τις πράξεις και έχουμε:***

$$(\alpha+\beta)^2+\alpha^2+\beta^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\beta^2=2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2=2(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2).$$

Όμοια, για την απόδειξη της (4) ***εκτελούμε τις πράξεις ξεκινώντας από το δεύτερο μέλος της και έχουμε:***

$$\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)=$$

$$=\frac{1}{2}(2\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2-2\beta\gamma+2\gamma^2-2\gamma\alpha)=\frac{1}{2}.2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha).$$

7. ***Μπορείτε να βρείτε γρήγορα τα γινόμενα:***

$$\mathbf{99.101,\quad 29.31\quad \kappa\alpha\iota\quad 19^2+38+1^2;}$$

Λύση:

Είναι:

$$\mathbf{99.101=(100-1)(100+1)=100^2-1^2=10000-1=9999,}$$

$$\mathbf{29.31=(30-1)(30+1)=30^2-1^2=899\quad \kappa\alpha\iota}$$

$$\mathbf{19^2+38+1^2=19^2+2.19+1^2=(19+1)^2=20^2=400.}$$

Πως θα βρείτε γρήγορα το εξαγόμενο $\mathbf{24.16}$;

8. ***Αν είναι*** $\boldsymbol{\alpha+\beta=3}$ ***και*** $\boldsymbol{\alpha\beta=2}$ ***να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:***

$$\boldsymbol{\Pi_1=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta},\quad \Pi_2=\alpha^2+\beta^2,\quad \Pi_3=\alpha^4+\beta^4\quad \kappa\alpha\iota\quad \Pi_4=\alpha^3+\beta^3.}$$

Λύση:

Εκτελούμε τις πράξεις στην παράσταση $\boldsymbol{\Pi_1}$ ***και έχουμε:***

$$\boldsymbol{\Pi_1=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{3}{2}.}$$

Η παράσταση $\boldsymbol{\Pi_2}$ ***γράφεται:***

$$\boldsymbol{\Pi_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=3^2-2.2=5.}$$

Όμοια, είναι:

$$\boldsymbol{\Pi_3=\alpha^4+\beta^4=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2\alpha^2\beta^2=\left(\alpha^2+\beta^2\right)^2-2(\alpha\beta)^2=5^2-2.2^2=17\quad \kappa\alpha\iota}$$

$$\boldsymbol{\Pi_4=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=3^3-3.2.5=-3.}$$

Ασκήσεις για λύση

1. **Να εξετάσετε αν οι ισότητες:**

$$0.x = 0, \quad x = x^2 + 1 \quad \text{και} \quad x^2 + 1 = (x+1)^2 - 2x, \quad x \in IR$$

είναι ταυτότητες στο IR.

2. **Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω ισότητες με (Σ) ή (Λ) αν είναι σωστές ή εσφαλμένες αντίστοιχα.**

$(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$, για κάθε $\alpha, \beta \in IR$	(Σ) ☐	(Λ) ☐
$(\alpha-\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$, για κάθε $\alpha, \beta \in IR$	(Σ) ☐	(Λ) ☐
$(\alpha-\beta)(-\beta-\alpha) = \beta^2 - \alpha^2$, για κάθε $\alpha, \beta \in IR$	(Σ) ☐	(Λ) ☐
$(\alpha-\beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$, για κάθε $\alpha, \beta \in IR$	(Σ) ☐	(Λ) ☐

3. **Να βρείτε τα αναπτύγματα:**

- $(\alpha+2\beta)^2, \quad \left(\frac{\alpha}{2}+1\right)^2 \quad \text{και} \quad \left(\frac{3\alpha}{2}+\frac{\beta}{3}\right)^2.$
- $(2\alpha-\beta)^2, \quad \left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)^2 \quad \text{και} \quad \left(\frac{5\alpha}{2}-\frac{\beta}{5}\right)^2.$
- $(2\alpha+\beta)^3, \quad (\alpha+2\beta)^3 \quad \text{και} \quad \left(3\alpha+\frac{\beta}{3}\right)^2.$
- $(\alpha-3\beta)^3, \quad (3\alpha-2\beta)^3 \quad \text{και} \quad \left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{3}\right)^3$
- $\left(\alpha^2+\beta\right)^2 = \cdots, \quad \left(\alpha\beta-\frac{x^2}{2}\right)^2 = \cdots, \quad \left(\frac{x\psi}{2}-\frac{1}{x\psi}\right)^2 = \cdots, \quad \left(x\psi+\frac{1}{2x\psi}\right)^2 = \cdots$

4. Όμοια, τα αναπτύγματα:

- $(\alpha+2\beta+\gamma)^2=\cdots,\quad (2\alpha+\beta-\gamma)^2=\cdots\quad \kappa\alpha\iota\quad (\alpha-2\beta-3\gamma)^2=\cdots$
- $\left(\alpha+2\beta+\frac{\gamma}{2}\right)^2=\cdots,\quad \left(2\alpha+\frac{\beta}{2}-\gamma\right)^2=\cdots\quad \kappa\alpha\iota\quad \left(\frac{\alpha}{2}-4\beta-\frac{\gamma}{2}\right)^2=\cdots.$

5. Να γράψετε απλούστερα τις παρακάτω παραστάσεις:

- $\Pi_1=\alpha^2+10\alpha\beta+25\beta^2=\cdots,\quad \Pi_2=9\alpha^2+12\alpha\beta+4\beta^2=\cdots,\quad \Pi_3=\alpha^2+\alpha\beta+\frac{\beta^2}{4}=\cdots$
- $\Pi_1=4\alpha^2-4\alpha\beta+\beta^2=\cdots,\quad \Pi_2=100\alpha^2-20\alpha\beta+\beta^2=\cdots,\quad \Pi_3=\frac{\alpha^2}{25}-2\alpha\beta+25\beta^2=\cdots$
- $\Pi_1=(\alpha-2\beta)(\alpha+2\beta)=\cdots,\quad \Pi_2=(-3\alpha+\beta)(-3\alpha-\beta)=\cdots$
- $\Pi_1=\left(\frac{2\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{2\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}\right)=\cdots\quad \kappa\alpha\iota\quad \Pi_2=(\alpha-3\beta)(\alpha+3\beta)(\alpha^2+9\beta^2)\ldots$
- $\Pi_1=8\alpha^3+36\alpha^2+54\alpha+27=\cdots,\quad \Pi_2=\alpha^3-12\alpha^2+48\alpha-64=\cdots$

6. Όμοια, τις παραστάσεις:

- $\Pi_1=\alpha^3+9\alpha^2\beta+27\alpha\beta^2+27\beta^3=\cdots,\quad \Pi_2=8\alpha^3-12\alpha^2+6\alpha-1=\cdots$
- $\Pi_1=\alpha^2+4\beta^2+9\gamma^2+4\alpha\beta+6\alpha\gamma+12\beta\gamma=\cdots\quad \kappa\alpha\iota$
- $\Pi_1=\alpha^2+\beta^2+4+2\alpha\beta-4\alpha-4\beta=\cdots$

7. Να βρείτε τα εξαγόμενα των πράξεων:

- $(3\alpha-1)(3\alpha+1)=\cdots,\quad (2\alpha-5\beta)(2\alpha+5\beta)=\cdots,\quad (\alpha-4\beta)(-\alpha-4\beta)=\cdots,$
- $(-\alpha-3\beta)(\alpha-3\beta)=\cdots,\quad -(2\alpha-3\beta)(-2\alpha-3\beta)=\cdots,\quad \left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)\left(-\alpha-\frac{\beta}{2}\right)=\cdots$
- $(\alpha-\beta+\gamma)(\alpha-\beta-\gamma)=\cdots,\quad (\alpha-\beta-\gamma)(\alpha+\beta+\gamma)=\cdots,\quad (\alpha+\beta-2)(-\alpha+\beta-2)=\cdots$

8. **Όμοια, τα εξαγόμενα των πράξεων:**

- $(\alpha+2\beta)(\alpha^2-2\alpha\beta+4\beta^2)$
- $(2\alpha+3\beta)(4\alpha^2-6\alpha\beta+9\beta^2)$
- $(3\alpha-2\beta)(9\alpha^2+6\alpha\beta+4\beta^2)$ ***και*** $\left(\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{\alpha^2}{9}+\frac{\alpha\beta}{6}+\frac{\beta^2}{4}\right)$.

9. **Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β είναι:**

$$(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)=\alpha^2$$

να δείξετε ότι $\beta=0$.

10. **Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α και β ισχύει:**

$$(\alpha-\beta)^2=-2\alpha\beta$$

να δείξετε ότι $\alpha=\beta=0$.

11. **Αν $\alpha,\beta,\ \gamma\in IR$ να δείξετε την αλήθεια των παρακάτω ταυτοτήτων:**

- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$ ***και*** $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)$.
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+2\alpha\beta+2\beta\gamma+2\gamma\alpha$.
- $(\alpha-\beta+\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma+2\gamma\alpha$.
- $(\alpha-\beta-\gamma)^2=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-2\alpha\beta+2\beta\gamma-2\gamma\alpha$.
- $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$ ***και***
- $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)$.

12. Αν $\alpha, \beta, \gamma, x, \psi, \omega \in IR$ να δείξετε την αλήθεια των παρακάτω ταυτοτήτων:

- $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2)=(\alpha x+\beta\psi)^2+(\alpha\psi-\beta x)^2.$
- $(\alpha^2+\beta^2)(x^2+\psi^2)=(\alpha x-\beta\psi)^2+(\alpha\psi+\beta x)^2.$
- $(x-\psi)(x-\omega)+(\psi-\omega)(\psi-x)+(\omega-x)(\omega-\psi)=x^2+\psi^2+\omega^2-x\psi-\psi\omega-\omega x.$
- $(\alpha^2+\beta^2)^2+4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2)=(\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2.$
- $(\alpha+\beta+\gamma)^2+(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2=3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2).$

13. Να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

- $\Pi_1=99.101=\cdots,\quad \Pi_2=999.1001=\cdots,\quad \Pi_3=9999.10001=\cdots$
- $\Pi_1=98.102=\cdots,\quad \Pi_2=998.1002=\cdots,\quad \Pi_3=9998.10002=\cdots$
- $\Pi_1=999^2+1998+1=\cdots,\quad \Pi_2=1001^2-2002+1=\cdots,$
- $\Pi_1=102^2-408+4=\cdots$ **και** $\Pi_2=\sqrt{99^2+198+1}=\cdots$

14. Να βρείτε την τιμή των παραστάσεων: $(1-\sqrt{3})^2$ **και** $\sqrt{4-2\sqrt{3}}.$

15. Αν $\Pi(x)=x^2$ να βρείτε τα πολυώνυμα:

$$f(x)=\Pi(x+1)-\Pi(x-1)\quad \text{και}\quad Q(x)=\Pi(x+1)\Pi(x-1)+2x^2-1.$$

16. Αν $x+\psi=1$ $x\psi=-2$ να βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

$$\Pi_1=x^2+\psi^2,\quad \Pi_2=x^3+\psi^3,\quad \Pi_3=x^4+\psi^4\quad \text{και}\quad \Pi_4=x^6+\psi^6.$$