Άρτια, Περιττή, Περιοδική Συνάρτηση

1. ***Έστω περιττή συνάρτηση*** $f : A \mapsto IR$, $A \subseteq IR$, A ***συμμετρικό διάστημα και*** $0 \in A$.

Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

Λ ύ σ η:

Για κάθε $x \in A$ ***είναι και*** $-x \in A$, ***αφού το διάστημα*** A ***είναι συμμετρικό.***

Επίσης, αφού η συνάρτηση f ***είναι περιττή, θα ισχύει:***

$$f(-x) = -f(x), \quad \text{για κάθε } x \in A \qquad (1).$$

Η (1) για $x = 0 \in A \Longrightarrow f(0) = -f(0) \Longrightarrow \cdots \Longrightarrow f(0) = 0$.

Παρατήρηση: ***Η γραφική παράσταση περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας την αρχή των αξόνων. Αντίστοιχα, κάθε άρτια συνάρτηση έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα*** $\psi'\psi$.

2. ***Έστω οι συναρτήσεις*** $f, \varphi : A \mapsto IR$ ***με*** A ***συμμετρικό διάστημα του*** IR. ***Να δείξετε ότι:***

- ***Αν οι συναρτήσεις*** f ***και*** φ ***είναι και οι δύο άρτιες ή και οι δύο περιττές, τότε η συνάρτηση*** $f.\varphi$ ***είναι άρτια.***
- ***Αν η συνάρτηση*** f ***είναι άρτια, ενώ η*** φ ***είναι περιττή ή αντίστροφα, τότε η συνάρτηση*** $f.\varphi$ ***είναι περιττή.***

Λ ύ σ η:

- ***Η συνάρτηση*** $f.\varphi$ ***ορίζεται στο*** A, ***αφού:*** $D_f \cap D_\varphi = A \neq \emptyset$, ***που είναι συμμετρικό.***

Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις f ***και*** φ ***είναι άρτιες. Είναι τότε:***

$$f(-x) = f(x) \quad \text{και} \quad \varphi(-x) = \varphi(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \qquad (1) \quad \text{και}$$

$$(f.\varphi)(-x) = f(-x).\varphi(-x) \overset{(1)}{=} f(x).\varphi(x) = (f.\varphi)(x), \quad , \quad \text{για κάθε} \quad x \in A.$$

Επομένως η συνάρτηση $f.\varphi$ ***είναι άρτια.***

Αντίστοιχα, αν οι συναρτήσεις f ***και*** φ ***είναι περιττές, τότε:***

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{και} \quad \varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in A \qquad (2) \quad \text{και}$$

$$(f.\varphi)(-x) = f(-x).\varphi(-x) \overset{(2)}{=} \{-f(x)\}.\{-\varphi(x)\} = \cdots = (f.\varphi)(x), \quad \text{για κάθε} \quad x \in A,$$

δηλαδή και πάλι η συνάρτηση $f.\varphi$ είναι άρτια.

- ***Έστω ότι η f είναι άρτια και η φ περιττή. Είναι τότε:***

$$f(-x) = f(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad \varphi(-x) = -\varphi(x), \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x \in A \quad (3) \quad \kappa\alpha\iota$$

$$(f.\varphi)(-x) = f(-x).\varphi(-x) \overset{(3)}{=} f(x).\{-\varphi(x)\} = \cdots = -(f.\varphi)(x), \qquad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x \in A,$$

οπότε η συνάρτηση $f.\varphi$ είναι περιττή.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν υποθέσουμε ότι η f είναι περιττή και η φ άρτια.

3. ***Δίδονται οι περιττές συναρτήσεις:***

$f: \; B \mapsto \Gamma, \quad g: A \to B$ με $A, B, \Gamma \subseteq IR$ και A, B συμμετρικά διαστήματα του IR.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι περιττή.

Λ ύ σ η:

Είναι $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \;:\; g(x) \in D_f\} = \{x \in A \;:\; g(x) \in B\} = A \neq \emptyset$ και συνεπώς ορίζεται η συνάρτηση $f \circ g$ στο συμμετρικό διάστημα A.

Για κάθε $x \in A$ είναι $-x \in A$ και:

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) \overset{g\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=} f(-g(x)) \overset{f\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{=} -f(g(x)) = -(f \circ g)(x).$$

Άρα η συνάρτηση $f \circ g$ είναι περιττή.

4. ***Έστω η περιττή και "1-1" συνάρτηση $f: \; [-\alpha, \alpha] \mapsto \Gamma, \quad \alpha \in IR^*$ με $f([-\alpha, \alpha]) = \Gamma$, όπου Γ διάστημα του IR.***

Να δείξετε ότι:

- ***Το Γ είναι συμμετρικό και***
- ***Η συνάρτηση f^{-1} είναι περιττή.***

Λ ύ σ η:

- ***Έστω $y \in \Gamma$. Τότε υπάρχει $x \in [-\alpha, \alpha] \;:\; y = f(x)$.***

Είναι τότε: $-y = -f(x) \overset{f\ \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{\eta}}{\Longleftrightarrow} -y = f(-x) \Longrightarrow -y \in f([-\alpha, \alpha]) \Longrightarrow -y \in \Gamma.$

Δηλαδή, για κάθε $y \in \Gamma$ είναι και $-y \in \Gamma$. Επομένως το Γ είναι συμμετρικό διάστημα.

- *Αν $\Gamma = [-\beta, \beta]$, $\beta \in IR^*$ τότε: $f : [-\alpha, \alpha] \mapsto [-\beta, \beta]$.*

Η συνάρτηση f είναι "1-1" με $f([-\alpha, \alpha]) = [-\beta, \beta]$. Επομένως αντιστρέφεται και η αντίστροφή της είναι η: $f^{-1} : [-\beta, \beta] \mapsto [-\alpha, \alpha]$.

Έστω $y = f^{-1}(x),\quad x \in [-\beta, \beta] \Rightarrow x = f(y) \Rightarrow -x = -f(y) \overset{f \text{ περιττή}}{\Longleftrightarrow} -x = f(-y) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f^{-1}(-x) = f^{-1}(f(-y)) = -y \Rightarrow f^{-1}(-x) = -f^{-1}(x), \quad \text{για κάθε } x \in [-\beta, \beta].$$

Επομένως η συνάρτηση f^{-1} είναι περιττή.

5. *Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f : IR \to IR$ με $f(x) = 2 - 3\eta\mu 2x$ είναι περιοδική.*

Λ ύ σ η:

Έστω <u>σταθερός μη μηδενικός</u> πραγματικός αριθμός $T \in IR^*$. Τότε για κάθε

$$x \in IR \quad \text{είναι και} \quad x + T \in IR.$$

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική, με περίοδο T. Επομένως για κάθε $x \in IR$ είναι:

$$f(x+T) = f(x) \Leftrightarrow 2 - 3\eta\mu 2(x+T) = 2 - 3\eta\mu 2x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu 2(x+T) = \eta\mu 2x \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} 2x + 2T = 2n\pi + 2x \\ \acute{\eta} \\ 2x + 2T = 2n\pi + \pi - 2x \end{matrix}\right\}, \quad n \in Z \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} T = n\pi \\ \acute{\eta} \\ T = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - 2x \end{matrix}\right., \quad n \in Z \quad \text{για κάθε } x \in IR.$$

Η λύση $T = n\pi + \frac{\pi}{2} - 2x$, $n \in Z$ απορρίπτεται, καθόσον ο T εξαρτάται από το x και συνεπώς δεν είναι σταθερός.

Επομένως η συνάρτηση f είναι περιοδική, με περίοδο τους αριθμούς $T = n\pi$, $n \in Z$ και πρωτεύουσα περίοδο: $T_0 = \pi$.

6. *Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f : IR \to IR$ με $f(x) = x + \eta\mu\, 2x$ δ ε ν είναι περιοδική.*

Λ ύ σ η:

Έστω σταθερός μη μηδενικός πραγματικός αριθμός $T \in IR^*$. Τότε για κάθε

$$x \in IR \quad \text{είναι και} \quad x + T \in IR.$$

Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική, με περίοδο T, θα έχουμε:

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in IR \Leftrightarrow \chi + T + \eta\mu\, 2(x+T) = x + \eta\mu\, 2x \Leftrightarrow$$

$$T + \eta\mu\, 2(x+T) = \eta\mu\, 2x \quad \text{για κάθε} \quad x \in IR \qquad (1).$$

Θέτοντας διαδοχικά στην ισότητα (1) $x = 0$ και $x = \frac{\pi}{2}$ παίρνουμε:

$$T + \eta\mu\, 2T = 0 \quad (2) \quad \text{και} \quad T - \eta\mu\, 2T = 0 \quad (3).$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των ισοτήτων (2) και (3) έχουμε: $2T = 0 \Leftrightarrow T = 0$, που είναι αδύνατο, αφού υπετέθη ότι: $T \in IR^*$.

Επομένως, η συνάρτηση f δ ε ν είναι περιοδική.