

## Εύρεση Τιμής Συνάρτησης - Λύση Εξίσωσης

1. Συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  επαληθεύει την συναρτησιακή σχέση:

$$f(x^2 + 3) + f(4x) = 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε δύο τουλάχιστον σημεία.

**Λύση:**

$$\text{Είναι: } x^2 + 3 = 4x \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = 3.$$

Η σχέση (1) για

$$\text{➤ } x = 1 \Rightarrow f(4) + f(4) = 0 \Rightarrow 2f(4) = 0 \Rightarrow f(4) = 0 \quad (2) \text{ και}$$

$$\text{➤ για } x = 3 \Rightarrow f(12) + f(12) = 0 \Rightarrow 2f(12) = 0 \Rightarrow f(12) = 0 \quad (3).$$

Από τις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι οι αριθμοί  $x_0 = 4$  και  $x'_0 = 12$  είναι ρίζες της  $f$ .

Επομένως η γραφική παράσταση της  $f$  τέμνει τον άξονα  $x'x$  σε δύο τουλάχιστον σημεία, που είναι τα:  $A(4,0)$  και  $B(12,0)$ .

2. Συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ικανοποιεί την σχέση:

$$f(f(x)) = 16x - 15, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Να δείξετε ότι:

$$\text{➤ } f(16x - 15) = 16f(x) - 15, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και}$$

$$\text{➤ Η εξίσωση } f(x) = 1 \text{ έχει μια τουλάχιστον λύση.}$$

**Λύση:**

$$\text{➤ Είναι } f(f(x)) = 16x - 15 \stackrel{x \rightarrow f(x)}{\Leftrightarrow} f(f(f(x))) = 16f(x) - 15 \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(16x - 15) = 16f(x) - 15, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (2).$$

$$\text{➤ Είναι: } 16x - 15 = x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x = 1.$$

$$\text{Η σχέση (2) για } x = 1 \Rightarrow f(1) = 16f(1) - 15 \Rightarrow \dots \Rightarrow f(1) = 1.$$

Άρα η εξίσωση  $f(x) = 1$  έχει τουλάχιστον την λύση  $x_0 = 1$ .