

Συναρτησιακές Σχέσεις

1. Συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \leq x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1) \text{ και}$$

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Να δείξετε ότι: $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Η (2) για

$$\triangleright x = y = 0 \Rightarrow f(0) \leq 2f(0) \Rightarrow f(0) \geq 0 \quad (3) \text{ και}$$

$$\triangleright \text{για } y = -x \Rightarrow f(0) \leq f(x) + f(-x) \stackrel{(3)}{\Rightarrow} f(x) + f(-x) = 0 \Rightarrow f(x) \geq -f(-x) \quad (4).$$

$$\text{Αλλά } f(x) \leq x, \text{ για κ θε } x \in \mathbb{R} \stackrel{x \rightarrow -x}{\Rightarrow} f(-x) \leq -x \Rightarrow -f(-x) \geq x \quad (5).$$

Από τις (4) και (5) συμπεραίνουμε ότι $f(x) = x$, για κ θε $x \in \mathbb{R}$, οπότε λόγω και της (1)

τελικά είναι: $f(x) = x$, για κ θε $x \in \mathbb{R}$.

2. Συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα και επαληθεύει την σχέση:

$$f(f(x)) = x, \text{ για κ θε } x \in \mathbb{R} \quad (1).$$

Να δείξετε ότι: $f(x) = x$, για κ θε $x \in \mathbb{R}$.

Λύση:

Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) < x_0 \Leftrightarrow f(x_0) < x_0 \quad (2) \quad f(x_0) > x_0 \quad (3).$

$$\triangleright \text{Αν } f(x_0) < x_0 \stackrel{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(f(x_0)) < f(x_0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_0 < f(x_0), \text{ αδύνατον, αφού: } f(x_0) < x_0.$$

$$\triangleright \text{Αν } f(x_0) > x_0 \stackrel{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} f(f(x_0)) > f(x_0) \stackrel{(1)}{\Rightarrow} x_0 > f(x_0), \text{ αδύνατον, αφού: } f(x_0) > x_0.$$

Επομένως δεν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R} : f(x_0) < x_0$ ή $f(x_0) > x_0$.

Άρα $f(x) = x$, για κ θε $x \in \mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \geq x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \quad (1) \text{ και}$$

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \quad (2).$$

Να δείξετε ότι:

- $f(0) = 0$ και
- $f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.