Ανισοϊσότητες υπό συνθήκες

Στα παραδείγματα που ακολουθούν θα δείτε μια διαφορετική προσέγγιση σε ασκήσεις απόδειξης ανισοϊσότητας με συνθήκες.

Ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι θέλουμε να αποδείξουμε την αλήθεια της συνεπαγωγής:

$$\alpha,\beta,\gamma \in IR,\ \ \alpha-2\beta>\gamma\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \alpha+\beta>2\gamma\ \ \Longrightarrow 9\alpha\beta-15\beta\gamma+27\alpha\gamma-9\alpha^2-20\gamma^2<0\ \ (1).$$

Ως γνωστόν η συνήθης αντιμετώπιση του παραπάνω θέματος είναι η ακόλουθη:

Η παράσταση $\Pi=9\alpha\beta-15\beta\gamma+27\alpha\gamma-9\alpha^2-20\gamma^2$ *παραγοντοποιείται και από το πρόσημο των παραγόντων της προκύπτει η αλήθεια της (1).*

Με αυτήν την λογική έχουμε:

$$\Pi=9\alpha\beta-15\beta\gamma+27\alpha\gamma-9\alpha^2-20\gamma^2=\Pi=9\alpha\beta-15\beta\gamma+12\alpha\gamma+15\alpha\gamma-9\alpha^2-20\gamma^2=$$

$$=(9\alpha\beta+12\alpha\gamma-9\alpha^2)-(15\beta\gamma-15\alpha\gamma+20\gamma^2)=3\alpha(3\beta+4\gamma-3\alpha)-5\gamma(3\beta+4\gamma-3\alpha)\Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow\Pi=(3\beta+4\gamma-3\alpha)(3\alpha-5\gamma)=(5\gamma-3\alpha)(3\alpha-3\beta-4\gamma)\quad(2).$$

Δίδονται όμως:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha-2\beta>\gamma\\ \kappa'\\ \alpha+\beta>2\gamma\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}2(\alpha-2\beta)>2\gamma\\ \kappa'\\ \alpha+\beta>2\gamma\end{matrix}\right\}\Longrightarrow 2(\alpha-2\beta)+(\alpha+\beta)>4\gamma\Longrightarrow 3\alpha-3\beta>4\gamma\quad(3).$$

Είναι επίσης:

$$\left\{\begin{matrix}\alpha-2\beta>\gamma\\ \kappa'\\ \alpha+\beta>2\gamma\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\alpha-2\beta>\gamma\\ \kappa'\\ 2(\alpha+\beta)>4\gamma\end{matrix}\right\}\Longrightarrow \alpha-2\beta+2(\alpha+\beta)>5\gamma\Longrightarrow 3\alpha-5\gamma>0\quad(4).$$

Από τις σχέσεις $(2),\ (3)\ \ \kappa\alpha\iota\ \ (4)$ *συμπεραίνουμε ότι:*

$$\Pi=9\alpha\beta-15\beta\gamma+27\alpha\gamma-9\alpha^2-20\gamma^2=(5\gamma-3\alpha)(3\alpha-3\beta-4\gamma)<0,$$

διαπιστώνουμε δηλαδή την αλήθεια της (1).

Στο σημείο αυτό θέλω να υπογραμμίσω ότι η πλειοψηφία των μαθητών τελειώνοντας την εκπαίδευση τους στο Γυμνάσιο δεν έχουν αποκτήσει ιδιαίτερες εμπειρίες γύρω από την αποδεικτική διαδικασία, την οποία διαδικασία θα συναντήσουν πολλάκις στο Λύκειο. Γι' αυτό θεωρώ ότι η μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο αποτελεί για τον μέσο μαθητή ***" Άλμα επί κοντώ ".***

Έτσι η παραπάνω απόδειξη για τον μέσο μαθητή είναι μια διαδικασία τουλάχιστον επίπονη. Γι' αυτό θα δώσω στους μαθητές μια διαφορετική προσέγγιση απόδειξης ανισοϊσοτήτων με συνθήκες, που κατά την γνώμη μου απλουστεύει την διαδικασία, και την οποία θα χαρακτήριζα πρωτότυπη.

Η κατανόηση της μεθόδου αυτής θα γίνει με την επίλυση παραδειγμάτων.

Έτσι τα θέματα ανισοϊσοτήτων με συνθήκες τα χωρίζω σε δύο κατηγορίες ανάλογα με το είδος των δεδομένων σχέσεων " ***ισότητες - ανισότητες*** *".*

1η Κατηγορία:

Στην κατηγορία αυτή οι δεδομένες σχέσεις είναι ισότητες.

Παράδειγμα 1ο:

Αν οι πραγματικοί αριθμοί χ, ψ, ω, ρ *ικανοποιούν τις συνθήκες:*

$\chi + 2\psi - \omega = 0$ *κ΄* $3\chi + 4\psi - 2\rho + \omega = 0$ *να δείξετε ότι:* $\chi^2 - \psi^2 + 11\omega^2 - 2\rho^2 \geq 0 \quad (1).$

Λύση:

Εφόσον οι δεδομένες συνθήκες είναι δύο ενώ οι μεταβλητές τέσσερις, δύο τουλάχιστον από τις μεταβλητές χ, ψ, ω *και* ρ *θεωρούνται αυθαίρετες, και επομένως έχουμε:*

$$\left\{\begin{matrix} \chi + 2\psi - \omega = 0 \\ 3\chi + 4\psi - 2\rho + \omega = 0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} \chi + 2\psi = \omega & (2) \\ 3\chi + 4\psi = 2\rho - \omega & (3) \end{matrix}\right\}.$$

Οι ισότητες (2) και (3) αποτελούν γραμμικό σύστημα[1] δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους, τους χ και ψ, για το οποίο είναι:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2\neq 0,\quad D_x=\begin{vmatrix}\omega & 2\\ 2\rho-\omega & 4\end{vmatrix}=6\omega-4\rho \quad \kappa\alpha\iota \quad D_\psi=\begin{vmatrix}1 & \omega\\ 3 & 2\rho-\omega\end{vmatrix}=2\rho-4\omega \qquad (4).$$

Επομένως, $\chi=\frac{D_x}{D}=2\rho-3\omega,\quad \psi=\frac{D_\psi}{D}=2\omega-\rho \qquad (5).$

Έτσι έχουμε: $\Pi=\chi^2-\psi^2+11\omega^2-2\rho^2=(2\rho-3\omega)^2-(2\omega-\rho)^2+11\omega^2-2\rho^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Pi=\rho^2+16\omega^2-8\omega\rho=(\rho-4\omega)^2\geq 0 \qquad (6).$$

Η ισότητα στην σχέση (1) ισχύει όταν, ισχύει η ισότητα στην σχέση (6).

Τότε όμως είναι $\rho=4\omega$ *και λόγω των σχέσεων (5)* $\chi=5\omega,\ \psi=-2\omega$, *δηλαδή:* $\frac{\chi}{5}=-\frac{\psi}{2}=\frac{\rho}{4}=\omega.$

Επομένως η σχέση (1) ισχύει ως ισότητα όταν: $\frac{\chi}{5}=-\frac{\psi}{2}=\frac{\rho}{4}=\omega.$

Παράδειγμα 2ο:

Αν οι πραγματικοί αριθμοί $\chi,\ \psi$ *και* ω *ικανοποιούν τις συνθήκες:*

$\chi-3\psi+8\omega=0 \quad \kappa' \quad 3\chi+\psi-6\omega=0$ *να δείξετε ότι:* $7\chi^2-\psi^2+\chi\omega-2\chi+3\omega\leq\frac{1}{4} \qquad (1).$

Λ ύ σ η:

Εφόσον οι δεδομένες συνθήκες είναι δύο ενώ οι μεταβλητές τρείς, μια τουλάχιστον από τις μεταβλητές χ,ψ *και* ω *θεωρείται αυθαίρετη, και επομένως έχουμε:*

$$\left\{\begin{matrix}\chi-3\psi+8\omega=0\\ 3\chi+\psi-6\omega=0\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left\{\begin{matrix}\chi-3\psi=-8\omega & (2)\\ 3\chi+\psi=6\omega & (3)\end{matrix}\right\}.$$

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (2) και (3) είναι η: $\chi=\omega,\quad \psi=3\omega \qquad (4).$

Η σχέση (1) ισοδύναμα γράφεται:

[1] ***Θεωρήθηκαν ως αυθαίρετες οι μεταβλητές*** ω,ρ ***επειδή το ως προς*** χ ***και*** ψ ***σύστημα των (2) κα (3) έχει ορίζουσα διάφορη του μηδενός.***

$$7\chi^2 - \psi^2 + \chi\omega - 2\chi + 3\omega \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 7\omega^2 - 9\omega^2 + \omega^2 - 2\omega + 3\omega \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\omega^2 + \omega - \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow 4\omega^2 - 4\omega + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (2\omega - 1)^2 \geq 0 \qquad (5),$$

σχέση η οποία προφανώς είναι αληθής.

Η ισότητα στην σχέση (1) ισχύει όταν ισχύει η ισότητα στην σχέση (5), δηλαδή όταν:

$$2\omega - 1 = 0 \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{2}.$$

Τότε όμως λόγω των σχέσεων (4) είναι και: $\chi = \omega = \frac{1}{2}, \quad \psi = 3\omega = \frac{3}{2}.$

Άρα η σχέση (1) ισχύει ως ισότητα όταν: $\chi = \omega = \frac{1}{2}, \quad \psi = \frac{3}{2}.$

2η Κ α τ η γ ο ρ ί α:

*Στην κατηγορία αυτή οι δεδομένες συνθήκες είναι ανισοϊσότητες. Στην περίπτωση αυτή οι δεδομένες ανισοϊσότητες καθίστανται ισότητες, "**με την εισαγωγή βοηθητικών μεταβλητών**", οπότε οδηγούμαστε στην λύση θεμάτων της προηγούμενης κατηγορίας.*

Παράδειγμα 3ο:

Αν οι πραγματικοί αριθμοί χ, ψ, ω *ικανοποιούν τις συνθήκες:*

$$\chi + 2\psi \leq 5\omega \quad \text{και} \quad 3\chi - 5\psi \geq \omega \quad \text{να δείξετε ότι:} \quad 7\chi - 19\psi + 7\omega \geq 0 \qquad (1).$$

Λ ύ σ η:

Είναι: $\chi + 2\psi \leq 5\omega$ *και* $3\chi - 5\psi \geq \omega$ *οπότε:* $\chi + 2\psi - 5\omega \leq 0$ *και* $3\chi - 5\psi - \omega \geq 0.$

Έτσι, θέτουμε: $\chi + 2\psi - 5\omega = -\theta_1, \quad 3\chi - 5\psi - \omega = \theta_2$ *με* $\theta_1, \theta_2 \geq 0.$

Επομένως: $$\begin{Bmatrix} \chi + 2\psi - 5\omega = -\theta_1 \\ \kappa' \\ 3\chi - 5\psi - \omega = \theta_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi + 2\psi = 5\omega - \theta_1 \\ \kappa' \\ 3\chi - 5\psi = \omega + \theta_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \chi = \frac{27\omega + 5\theta_1 + 2\theta_2}{11} \\ \\ \psi = \frac{14\omega - 3\theta_1 - \theta_2}{11} \end{Bmatrix} \qquad (2).$$

Η παράσταση $\varPi = 7\chi - 19\psi + 7\omega$, *λόγω των σχέσεων (2), γράφεται:*

$$\varPi = 7\chi - 19\psi + 7\omega = 7\frac{27\omega + 5\theta_1 + 2\theta_2}{11} - 19\frac{14\omega - 3\theta_1 - \theta_2}{11} + 7\omega \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \varPi = \cdots = \frac{92\theta_1 + 33\theta_2}{11} \geq 0,$$

αφού είναι: $\theta_1,\ \theta_2 \geq 0$.

Η ισότητα στην σχέση (1) ισχύει όταν: $\frac{92\theta_1+33\theta_2}{11} \geq 0 \overset{\theta_1,\ \theta_2 \geq 0}{\Longleftrightarrow} \theta_1 = \theta_2 = 0$.

Τότε όμως λόγω των σχέσεων (2) είναι:

$$\chi = 27\frac{\omega}{11} \quad \kappa\alpha\iota \quad \psi = 14\frac{\omega}{11}, \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}: \ \frac{\chi}{27} = \frac{\psi}{14} = \frac{\omega}{11}.$$

Δηλαδή, η αποδεικτέα σχέση ισχύει ως ισότητα, όταν: $\frac{\chi}{27} = \frac{\psi}{14} = \frac{\omega}{11}$.

Παράδειγμα 4ο:

Αν οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ *ικανοποιούν τις συνθήκες:*

$\alpha \geq 3\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha - \beta \leq 4\gamma$ *να δείξετε ότι:* $72\gamma^2 + 2\alpha^2 - 24\alpha\gamma + \alpha - 3\beta \geq 0 \quad (1)$.

Λ ύ σ η:

Είναι: $\alpha \geq 3\beta \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha - \beta \leq 4\gamma \Leftrightarrow \alpha - 3\beta \geq 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha - \beta - 4\gamma \leq 0$.

θέτουμε: $\alpha - 3\beta = \theta_1 \quad \kappa\alpha\iota \quad \alpha - \beta - 4\gamma = -\theta_2, \quad \mu\varepsilon \quad \theta_1,\ \theta_2 \geq 0$ *και έχουμε:*

$$\begin{Bmatrix} \alpha - 3\beta = \theta_1 \\ \kappa' \\ \alpha - \beta = 4\gamma - \theta_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = 6\gamma - \dfrac{\theta_1 + 3\theta_2}{2} \\ \\ \beta = 2\gamma - \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2} \end{Bmatrix} \qquad (2).$$

Έτσι, η παράσταση $\varPi = 72\gamma^2 + 2\alpha^2 - 24\alpha\gamma + \alpha - 3\beta$ *γράφεται:*

λόγω των σχέσεων (2), γράφεται:

$$\Pi = 72\gamma^2 + 2\alpha^2 - 24\alpha\gamma + \alpha - 3\beta = \cdots = \frac{(\theta_1 + 3\theta_2)^2 + 2\theta_1}{2} \geq 0, \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}: \quad \theta_1, \ \theta_2 \geq 0.$$

Η ισότητα στην σχέση (1) ισχύει όταν:

$$\frac{(\theta_1 + 3\theta_2)^2 + 2\theta_1}{2} = 0 \overset{\theta_1,\ \theta_2 \geq 0}{\iff} \theta_1 = \theta_2 = 0.$$

Τότε όμως λόγω των σχέσεων (2) είναι:

$$\alpha = 6\gamma \quad \kappa\alpha\iota \quad \beta = 2\gamma, \quad \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}: \quad \frac{\alpha}{6} = \frac{\beta}{2} = \gamma.$$

Παράδειγμα 5ο:

Δίδεται το τριώνυμο: $f(x) = \alpha x^2 + 2\beta\chi + \gamma \quad \mu\varepsilon \quad \alpha, \beta, \gamma > 0.$ *Αν είναι γνωστό ότι:*

$$f(x) \geq 0 \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad x \in [-1, 1] \qquad \nu\alpha\ \delta\varepsilon\acute{\iota}\xi\varepsilon\tau\varepsilon\ \acute{o}\tau\iota: \quad 4\alpha - 20\beta + 25\gamma \geq 0 \qquad (1).$$

Λ ύ σ η:

Η διακρίνουσα του τριωνύμου $f(x)$ *είναι:* $\Delta = 4\beta^2 - 4\alpha\gamma = 4(\beta^2 - \alpha\gamma).$

Για την διακρίνουσα Δ *του τριωνύμου* $f(x)$ *θα είναι:* $\Delta \leq 0$ ή $\Delta > 0.$

Σε κάθε περίπτωση θα αποδείξουμε την αλήθεια της (1).

- *Έστω* $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4(\beta^2 - \alpha\gamma) \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - \alpha\gamma \leq 0 \Leftrightarrow \beta^2 - \alpha\gamma = -\theta, \quad \theta \geq 0.$ *Είναι τότε:*

$$\gamma = \frac{\beta^2 + \theta}{\alpha} \quad o\pi\acute{o}\tau\varepsilon\ \eta\ \pi\alpha\rho\acute{\alpha}\sigma\tau\alpha\sigma\eta \quad \Pi = 4\alpha - 20\beta + 25\gamma \quad \gamma\rho\acute{\alpha}\varphi\varepsilon\tau\alpha\iota:$$

$$\Pi = 4\alpha - 20\beta + 25\frac{\beta^2 + \theta}{\alpha} = \cdots = \frac{(2\alpha - 5\beta)^2 + 25\theta}{\alpha} \geq 0, \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon} \quad \alpha > 0, \quad \theta \geq 0.$$

Η ισότητα στην σχέση (1) ισχύει όταν:

$$\frac{(2\alpha - 5\beta)^2 + 25\theta}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \beta = 2\frac{\alpha}{5} \quad \kappa\alpha\iota \quad \theta = 0, \quad o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \quad \gamma = 4\frac{\alpha}{25}.$$

Δηλαδή η (1) ισχύει ως ισότητα όταν: $\beta = \frac{2\alpha}{5} \quad \kappa\alpha\iota \quad \gamma = \frac{4\alpha}{25}.$

- *Έστω* $\Delta > 0.$ *Στην περίπτωση αυτή το τριώνυμο:* $f(x) = ax^2 + 2\beta\chi + \gamma$ *θα έχει δύο ρίζες άνισες πραγματικές, ας υποθέσουμε τις* $\rho_1,\ \rho_2$ *με* $\rho_1 < \rho_2$.

Για την θέση των αριθμών $-1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 1$ *ως προς τις ρίζες του τριωνύμου* $f(x)$ *υπάρχουν τα ενδεχόμενα:*

  - $-1 < 1 < \rho_1 < \frac{\rho_1+\rho_2}{2} = -\frac{\beta}{\alpha} < 0 < \rho_2.$

    Στην περίπτωση αυτή είναι: $\Delta > 0,\ \ \alpha f(1) > 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 1 < \frac{\rho_1+\rho_2}{2}.$

    Η σχέση $1 < \frac{\rho_1+\rho_2}{2} \Leftrightarrow 1 < -\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha + \beta < 0$ *που είναι αδύνατον, αφού* $\alpha,\ \beta > 0.$

  - *Περίπτωση κάποιος από τους αριθμούς* $-1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ 1$ *να βρίσκεται μεταξύ των ριζών* $\rho_1\ \ \kappa\alpha\iota\ \ \rho_2$ *του τριωνύμου* $f(x)$ *δεν υπάρχει. Γιατί, αν για παράδειγμα ήταν:*

$$\rho_1 < 1 < \rho_2\ \ \ \tau \acute{o} \tau \varepsilon:\ \ \alpha f(1) < 0 \overset{\alpha>0}{\Longrightarrow} f(1) < 0$$

    που είναι αδύνατον, αφού: $f(x) \geq 0\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in [-1,1].$

  - $-1 < \rho_1 < \frac{\rho_1+\rho_2}{2} = -\frac{\beta}{\alpha} < \rho_2 < 1.$

    Στην περίπτωση αυτή θα είναι:

$$-\frac{\beta}{\alpha} \in (\rho_1, \rho_2)\ \ \ \kappa\alpha\iota\ \ \ -\frac{\beta}{\alpha} \in [-1,1].$$

    Επομένως: $\alpha f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) < 0 \overset{\alpha>0}{\Longrightarrow} f\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) < 0$ *αδύνατον, αφού* $f(x) \geq 0\ \ \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ \ x \in [-1,1].$

  - *Έστω τέλος ότι:* $\rho_1 < \frac{\rho_1+\rho_2}{2} = -\frac{\beta}{\alpha} < \rho_2 < -1 < 1.$

    Είναι τότε: $\Delta > 0,\ \alpha f(-1) > 0\ \ \ \kappa\alpha\iota\ \ \ \frac{\rho_1+\rho_2}{2} < -1 \ \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4(\beta^2 - \alpha\gamma) > 0,\ \ f(-1) > 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ -\frac{\beta}{\alpha} < -1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta^2 - \alpha\gamma > 0,\ \ \alpha - 2\beta + \gamma > 0\ \ \ \kappa\alpha\iota\ \ \ \alpha - \beta < 0.$$

    Θέτουμε: $\alpha - 2\beta + \gamma = \theta_1,\ \ \ \alpha - \beta = -\theta_2\ \ \ \mu\varepsilon\ \ \ \theta_1,\ \theta_2 > 0$ *και έχουμε:*

$$\begin{Bmatrix} \alpha - 2\beta = \theta_1 - \gamma \\ \kappa' \\ \alpha - \beta = -\theta_2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \alpha = -\theta_1 - 2\theta_2 + \gamma \\ \kappa' \\ \beta = -\theta_1 - \theta_2 + \gamma \end{Bmatrix}.$$

    Η παράσταση $\Pi = 4\alpha - 20\beta + 25\gamma$ *γράφεται:*

$$\Pi = 4\alpha - 20\beta + 25\gamma = 4(-\theta_1 - 2\theta_2 + \gamma) - 20(-\theta_1 - \theta_2 + \gamma) + 25\gamma \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Pi = \cdots = 16\theta_1 + 12\theta_2 + 9\gamma > 0, \quad \alpha\varphi o\acute{\upsilon}: \quad \theta_1,\ \theta_2\ \kappa\alpha\iota\ \ \gamma > 0.$

Στην περίπτωση αυτή η συνθήκη $\Delta > 0$ δεν χρησιμοποιήθηκε.

Σημειώνεται ότι στην περίπτωση που $\Delta > 0$ η σχέση (1) δεν μπορεί να ισχύει ως ισότητα.

Με τα παραπάνω παραδείγματα θεωρώ ότι έγινε σαφής η διαδικασία απόδειξης ανισοϊσοτήτων με συνθήκες με μια μέθοδο πρωτότυπη και φιλικότερη για τους μαθητές.

Για την καλύτερη εμπέδωση της μεθόδου αυτής προτείνω στους μαθητές την απόδειξη των παρακάτω συνεπαγωγών:

1. Αν $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma \in IR}$ **και** $\boldsymbol{\alpha+3\beta+5\gamma=0,\quad 3\alpha-\beta-5\gamma=0}$ **να δείξετε ότι:**

$$\boldsymbol{\alpha^2+\beta^2-3\gamma^2-\alpha\beta+3\beta\gamma+3\alpha\gamma+\gamma-3\alpha-3\beta \geq -4.}$$

2. Αν $\boldsymbol{\alpha,\beta,\gamma \in IR}$ **και** $\boldsymbol{\alpha \leq \beta-2\gamma,\quad \alpha-2\beta \geq \gamma}$ **να δείξετε ότι:**

- $\boldsymbol{2\alpha-5\beta-5\gamma \geq 0}$ **και**
- $\boldsymbol{2\alpha^2+5\beta^2-10\gamma^2-7\alpha\beta-5\beta\gamma-\alpha\gamma \leq 0.}$