Προτού αναφερθώ στα κριτήρια διαιρετότητας ακεραίου με το 7, το 11 και το 13 θα κάνω μια σύντομη αναφορά στα σύμβολα $k!$, $k \in N$ *και* $\binom{n}{k}$ $\acute{o}\pi o\upsilon$ $n, k \in N$, $k \leq n$, *αλλά και στο δυώνυμο του Νεύτωνα.*

&01. Το σύμβολο $k!$, $\kappa \in N$.

Αν k *είναι τυχαίος φυσικός αριθμός τότε το σύμβολο* $k!$ *διαβάζεται* k $\pi\alpha\rho\alpha\gamma o\nu\tau\iota\kappa\acute{o}$ *και ορίζεται ως εξής:* $k! = 1.2.3. \dots \dots .(k-1).k$ $\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon$ $k = 0, 1, 2, \dots \dots$

Ορίζουμε επίσης: $0! = 1$.

Παράδειγμα 1: Να υπολογίσετε τα: $1!$, $3!$, $4!$ $\kappa\alpha\iota$ $5!$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω είναι:

$$1! = 1, \qquad 3! = 1.2.4 = 6, \quad 4! = 1.2.3.4 = 24 \quad \kappa\alpha\iota \quad 5! = 1.2.3.4.5 = 120.$$

Ιδιότητα 1: Ισχύει: $k! = (k-p)!\,(k-p+1)(k-p+2)\dots(\kappa-1).\kappa$, $p \in N$, $0 \leq p \leq k$.

Απόδειξη: Σύμφωνα με τον ορισμό είναι: $k! = 1.2.3. \dots \dots .(k-1).k$.

Αλλά k, $p \in N$ $\kappa\alpha\iota$ $p \leq k$. *Άρα:* $0 \leq k-p \leq \kappa$, $k-p \in N$.

Τότε όμως ο φυσικός αριθμός $k-p$ *θα βρίσκεται ενδιάμεσα των φυσικών αριθμών* 1 $\kappa\alpha\iota$ k *και επομένως θα είναι:*

$$k! = 12.3.\dots(k-p).(k-p+1)(k-p+2)\dots[k-p+(p-1)](k-p+p) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k! = (k-p)!\,(k-p+1)(k-p+2)\dots(k-1).k.$$

Εφαρμογή: Να απλοποιήσετε τα κλάσματα:

$$\frac{8!}{6!}, \quad \frac{100!}{99!}, \quad \frac{5!\,50!}{6!\,48!} \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{n!}{(n-2)!}, \qquad n \in N, \ n \geq 2.$$

Με βάση την παραπάνω ιδιότητα είναι:

$$\frac{8!}{6!} = \frac{6!.7.8}{6!} = 56, \qquad \frac{100!}{99!} = \frac{99!.100}{99!} = 100, \qquad \frac{5!\,50!}{6!\,49!} = \frac{5!\,49!\,50}{5!.6.49!} = \frac{25}{3} \qquad \kappa\alpha\iota$$

$$\frac{n!}{(n-2)!} = \frac{(n-2)!.(n-1).n}{(n-2)!} = (n-1).n = n^2 - n.$$

&02. Το σύμβολο $\binom{n}{k}$ $όπου\ n,\ k \in N,\ \ k \leq n.$

Αν $n,\ k$ είναι τυχαίοι φυσικοί αριθμοί, $k \leq n$ τότε το σύμβολο $\binom{n}{k}$ διαβάζεται:

"Συνδυασμοί n $αντικειμένων$ $ανά$ k" και ορίζεται ως ακολούθως:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \quad για\ κάθε \quad k = 0, 1, 2, \dots n.$$

Ορίζουμε επίσης: $\binom{n}{0} = 1.$

Ιδιότητα 1: Ισχύουν: $\binom{n}{n} = 1 \quad και \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$

Πράγματι, σύμφωνα με τον ορισμό είναι:

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{n!}{n!.\,0!} = 1 \quad και \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,[n-(n-k)]!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Έτσι, μπορούμε να γράφουμε: $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!.3!} = \cdots = 10.$

&03. Το δυώνυμο του Νεύτωνα $(x+y)^n$ $για\ κάθε$ $x, y \in IR,\ \ n \in N.$

Για κάθε $x,\ y \in IR$ $και$ $n \in N$ ισχύει η αλήθεια της παρακάτω ταυτότητας:

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}x^2y^{n-2} + \binom{n}{n-1}xy^{n-1} + \binom{n}{n}y^n,$$

που οφείλεται στον Νεύτωνα.

Παράδειγμα: Με βάση το δυώνυμο του Νεύτωνα είναι:

- $(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^3 + \binom{3}{1}x^2y + \binom{3}{2}xy^2 + \binom{3}{3}y^3 = \cdots = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
- $(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4 = \cdots = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
- $(x+y)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4y + \binom{5}{2}x^3y^2 + \binom{5}{3}x^2y^3 + \binom{5}{4}xy^4 + \binom{5}{5}y^5 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+y)^5 = \cdots = x^5 + 5x^4y + 10x^2y^3 + 10xy^4 + y^5.$$

- $(x+y)^6 = \binom{6}{0}x^6 + \binom{6}{1}x^5y + \binom{6}{2}x^4y^2 + \binom{6}{3}x^3y^3 + \binom{6}{4}x^2y^4 + \binom{6}{5}xy^5 + \binom{6}{6}y^6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+y)^6 = \cdots = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 60x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6.$$

&1. Κριτήρια διαιρετότητας ακεραίων

Είναι γνωστό ότι αν για δύο ακέραιους αριθμούς α και β ισχύει:

$$\alpha \ \ \delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\acute{\iota} \ \ \beta, \quad \tau\acute{o}\tau\varepsilon \ o \ \ \alpha \ \ \theta\alpha \ \delta\iota\alpha\iota\rho\varepsilon\acute{\iota} \ \kappa\alpha\iota \ \tau o\nu \ \ -\beta \ \ \kappa\alpha\iota \ \alpha\nu\tau\acute{\iota}\sigma\tau\rho o\varphi\alpha.$$

Γι' αυτό στο δοκίμιο αυτό θα αναφερθούμε σε διαιρέτες θετικών ακεραίων, αφού σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση οι διαιρέτες κάθε θετικού ακέραιου είναι και διαιρέτες του αντιθέτου του.

Υπενθυμίζω επίσης ότι:

Κάθε θετικός ακέραιος αριθμός

$$\alpha = \overline{x_1x_2x_3 \dots x_{n-1}x_n}\,, \qquad 0 \le x_1, x_2, x_3 \ \dots, x_{n-1}, x_n \le 9$$

τίθεται με την μορφή[1]:

$$\alpha = x_1.10^n + x_2.10^{n-1} + x_3.10^{n-2} + \cdots + x_{n-1}.10 + x_n.$$

Π1: Κάθε δύναμη του δέκα με φυσικό εκθέτη είναι πολλαπλάσιο του εννέα αυξημένο κατά ένα, δηλαδή:

$$10^n = \pi o\lambda 9 + 1, \quad \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ \ n \in N.$$

Απόδειξη 1η:

Πράγματι: $10^n = (9+1)^n \Rightarrow$

$$\Rightarrow 10^n = \binom{n}{0}9^n + \binom{n}{1}9^{n-1}.1 + \binom{n}{2}9^{n-2}.1^2 + \cdots + \binom{n}{n-2}9^2.1^{n-2} + \binom{n}{n-1}9.1^{n-1} + \binom{n}{n}.1^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^n = 9\left\{\binom{n}{0}9^{n-1} + \binom{n}{1}9^{n-2} + \binom{n}{2}9^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2}9 + \binom{n}{n-1}\right\} + 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^n = \pi o\lambda 9 + 1, \quad \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ \varphi\upsilon\sigma\iota\kappa\acute{o} \ \ n,$$

εφόσον ο αριθμός $\binom{n}{0}9^{n-1} + \binom{n}{1}9^{n-2} + \binom{n}{2}9^{n-3} + \cdots + \binom{n}{n-2}9 + \binom{n}{n-1}$ **είναι ακέραιος.**

Απόδειξη 2η:

Θα δείξουμε ότι $10^n = \pi o\lambda 9 + 1, \ \ \gamma\iota\alpha \ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \ \ n \in N$ **με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής.**

Έτσι, για $n = 0$ $\varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota$: $10^n = 10^0 = 1 = 0.9 + 1 = \pi o\lambda 9 + 1.$

---

[1] Δεκαδική μορφή αριθμού

Υποθέτουμε ότι η ισότητα $10^n = \pi o\lambda 9 + 1$ ισχύει για τον τυχαίο φυσικό αριθμό k, με $k > 1$.

Υποθέτουμε δηλαδή ότι: $10^k = \pi o\lambda 9 + 1, \quad k > 1 \qquad (a).$

Θα αποδείξουμε τώρα την αλήθεια της $10^n = \pi o\lambda 9 + 1$ *για* $n = k + 1$, *δηλαδή ότι:*

$$10^{\kappa+1} = \pi o\lambda 9 + 1.$$

Πράγματι, είναι:

$$10^{\kappa+1} = 10.10^k \overset{(a)}{=} 10.(\pi o\lambda 9 + 1) = 10.\pi o\lambda 9 + 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10^{\kappa+1} = \underbrace{10.\pi o\lambda 9 + 9}_{\pi o\lambda 9} + 1 = \pi o\lambda 9 + 1.$$

Έτσι, σύμφωνα με θεώρημα της Τέλειας Επαγωγής είναι:

$$10^n = \pi o\lambda 9 + 1, \quad \gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon \quad n \in N.$$

Π2: Κάθε θετικός ακέραιος α είναι πολλαπλάσιο του εννέα[2] αυξημένο κατά το άθροισμα των ψηφίων του, δηλαδή αν:

$$\alpha = \overline{x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n}, \quad 0 \le x_1, x_2, x_3 \ \ldots, x_{n-1}, x_n \le 9 \ \ \tau\acute{o}\tau\varepsilon:$$

$$\alpha = \pi o\lambda 9 + x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_n.$$

__Απόδειξη:__

Είναι γνωστό πλέον ότι:

$$a = x_1.10^n + x_2.10^{n-1} + x_3.10^{n-2} + \cdots + x_{n-1}.10 + x_n. \qquad (1).$$

Έτσι, και λόγω της αλήθειας της προηγούμενης πρότασης (Π1) είναι:

$$\left\{\begin{array}{c} x_1.10^n = x_1(\pi o\lambda 9 + 1) = x_1.\pi o\lambda 9 + x_1 \\ \kappa\alpha\iota \\ x_2.10^{n-1} = x_2(\pi o\lambda 9 + 1) = x_2.\pi o\lambda 9 + x_2 \\ \vdots \\ \kappa\alpha\iota \\ x_{n-1}.10 = x_{n-1}(\pi o\lambda 9 + 1) = x_{n-1}.\pi o\lambda 9 + x_{n-1} \end{array}\right\} \qquad (2).$$

Τελικά η ισότητα (1) λόγω των ισοτήτων (2) γράφεται:

---

[2] *Άρα και του τρία*

$$\alpha = x_1.\pi o\lambda 9 + x_1 + x_2.\pi o\lambda 9 + x_2 + \cdots\cdots + x_{n.} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \underbrace{(x_1\pi o\lambda 9 + x_2\pi o\lambda 9)}_{\pi o\lambda 9} + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n.} \Rightarrow \alpha = \pi o\lambda 9 + x_1 + x_2 + \cdots + x_{n.}.$$

Π3. Ένας θετικός ακέραιος αριθμός α διαιρείται με το τρία "3" ή το εννέα "9" όταν το άθροισμα των ψηφίων του διαιρείται με το τρία ή το εννέα αντίστοιχα.

Απόδειξη:

Όπως είδαμε στην προηγούμενη πρόταση (Π2) κάθε θετικός ακέραιος είναι πολλαπλάσιο του εννέα, άρα και του τρία, αυξημένος κατά το άθροισμα των ψηφίων του.

Δηλαδή, αν $\alpha = \overline{x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}x_n}$, $\mathbf{0} \leq x_1, x_2, x_3 \ \ldots, x_{n-1}, x_n \leq \mathbf{9}$ $\tau\acute{o}\tau\varepsilon$:

$$\alpha = \pi o\lambda 9 + (x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_{n.}).$$

Κάθε πολλαπλάσιο του εννέα διαιρείται με το εννέα, άρα και με το τρία.

Για να διαιρείται επομένως ο αριθμός α με το εννέα ή το τρία θα πρέπει ο αριθμός:

$$y = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n-1} + x_{n.},$$

δηλαδή το άθροισμα των ψηφίων του να διαιρείται με το εννέα ή το τρία αντίστοιχα.