Θέματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Α. Θεώρημα Stewart:

Δίδεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ και έστω M σημείο της ευθείας $B\Gamma$.

- **Αν το M είναι σημείο του τμήματος $B\Gamma$, τότε:**

$$AB^2.M\Gamma + A\Gamma^2.MB = AM^2.B\Gamma + MB.M\Gamma.B\Gamma \qquad (1)$$

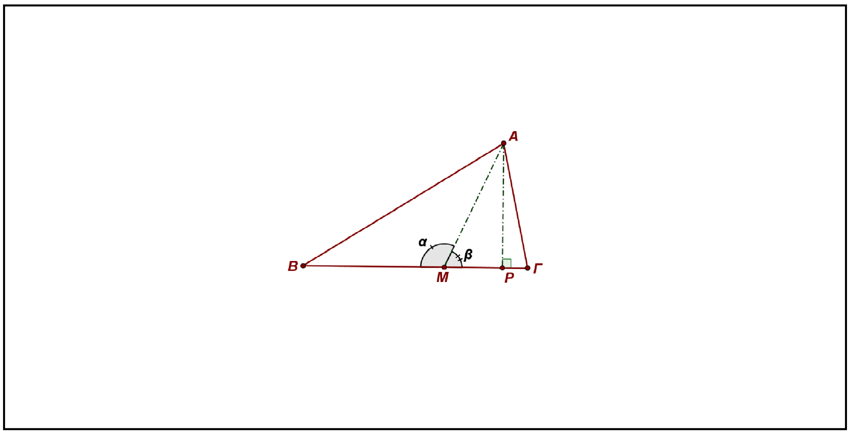
- **Αν το M είναι εξωτερικό σημείο του τμήματος $B\Gamma$, τότε:**

$$\left|A\Gamma^2.MB - AB^2.M\Gamma\right| = AM^2.B\Gamma - MB.M\Gamma.B\Gamma \qquad (1)$$

Απόδειξη:

- **Έστω πρώτον ότι το σημείο M είναι σημείο του τμήματος $B\Gamma$. Οι γωνίες $\hat{\alpha}$ και $\hat{\beta}$ είναι παραπληρωματικές. Επομένως γενικά η μία θα είναι οξεία και η άλλη αμβλεία. Έστω λοιπόν ότι το σημείο M βρίσκεται μεταξύ των σημείων B και P. Είναι τότε:**

$$\hat{\alpha} > 90^\circ \ \ \textit{και} \ \ \hat{\beta} < 90^\circ.$$



Επομένως:

$$\left\{\begin{matrix} \hat{\alpha} > 90^\circ \\ \textit{και} \\ \hat{\beta} < 90^\circ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} AB^2 = AM^2 + MB^2 + 2MB.MP \\ \textit{και} \\ A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2 - 2M\Gamma.MP \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} AB^2.M\Gamma = AM^2.M\Gamma + MB^2.M\Gamma + 2MB.MP.M\Gamma \\ \kappa\alpha\iota \\ A\Gamma^2.MB = AM^2.MB + M\Gamma^2.MB - 2M\Gamma.MP.MB \end{matrix}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} \Rightarrow$$

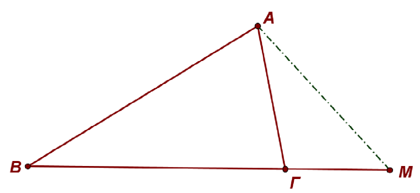
$$\Rightarrow AB^2.M\Gamma + A\Gamma^2.MB = AM^2(MB + M\Gamma) + MB.M\Gamma(MB + M\Gamma) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AB^2.M\Gamma + A\Gamma^2.MB = AM^2.B\Gamma + MB.M\Gamma.B\Gamma.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η (1) ισχύει και στις περιπτώσεις που το σημείο M συμπίπτει με το P, οπότε $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta} = 90°$, ή με κάποιο από τα σημεία B και Γ.

- *Αν το σημείο M είναι εξωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$, ας υποθέσουμε προς το μέρος του Γ, τότε:*

  Εφαρμόζουμε το θεώρημα Stewart στο τρίγωνο $\triangle ABM$ για το εσωτερικό σημείο Γ της πλευράς του MB και έχουμε:



$$AB^2.\Gamma M + AM^2.\Gamma B = A\Gamma^2.BM + B\Gamma.\Gamma M.BM \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\Gamma^2.BM - AB^2.\Gamma M = AM^2.\Gamma B - B\Gamma.\Gamma M.BM \qquad (2).$$

- *Όμοια, αν το M είναι εξωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος $B\Gamma$, προς το μέρος του B, τότε αποδεικνύεται ότι:*

$$AB^2.\Gamma M - A\Gamma^2.BM = AM^2.\Gamma B - B\Gamma.BM.\Gamma M \qquad (3).$$

Παρατήρηση: ***Αν το σημείο M είναι μέσον του $B\Gamma$, οπότε το τμήμα $AM = \mu_\alpha$, τότε λόγω της ισότητας (1) θα είναι:***

$$AB^2.M\Gamma + A\Gamma^2.MB = AM^2.B\Gamma + MB.M\Gamma.B\Gamma \overset{MB=M\Gamma=\frac{B\Gamma}{2}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow AB^2 + A\Gamma^2 = 2.AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \qquad (1').$$

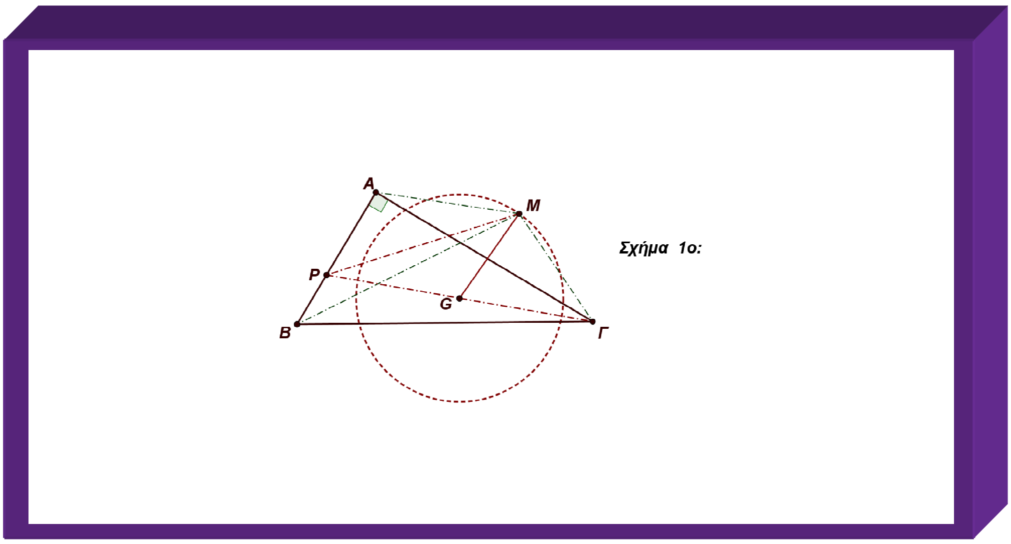
Η $(1')$ αποτελεί ως γνωστόν το 1ο θεώρημα των διαμέσων.

Άσκηση 1: ***Δίδεται τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ με πλευρές: $AB = 6$, $A\Gamma = 8$ και $B\Gamma = 10$ και μεταβλητό σημείο του επιπέδου του.***

- ***Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$***
- ***Να δείξετε ότι: $MA^2 + 2.MB^2 + 3.M\Gamma^2 = 6.MG^2 + 144$, με G σταθερό σημείο του επιπέδου του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$.***
- ***Αν είναι γνωστό ότι $MA^2 + 2.MB^2 + 3.M\Gamma^2 = 168$ ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος του σημείου M;***

Λ ύ σ η:

- ***Είναι φανερό ότι: $AB^2 + A\Gamma^2 = 6^2 + 8^2 = 100 = 10^2 = B\Gamma^2$ και επομένως το τρίγωνο $\triangle AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο στο A.***



- *Θεωρούμε εσωτερικό σημείο P του τμήματος AB έτσι ώστε να είναι:*

$$\frac{PA}{PB} = 2 \Rightarrow \frac{PA}{PA+PB} = \frac{2}{3} \Rightarrow PA = \frac{2}{3}AB \Rightarrow PA = 4, \quad PB = 2 \quad (1).$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Stewart στο τρίγωνο $\triangle MAB$ για το εσωτερικό σημείο P της πλευράς του AB και παίρνουμε:

$$MA^2.PB + MB^2.PA = MP^2.AB + PA.PB.AB \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2MA^2 + 4MB^2 = 6MP^2 + 48 \Rightarrow MA^2 + 2MB^2 = 3MP^2 + 24 \quad (2).$$

Επομένως:

$$MA^2 + 2MB^2 + 3M\Gamma^2 = 3MP^2 + 18 + 3M\Gamma^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA^2 + 2MB^2 + 3M\Gamma^2 = 3(MP^2 + M\Gamma^2) + 18 \quad (3).$$

Κατά το 1ο θεώρημα των διαμέσων τριγώνου, αν G το μέσον του $P\Gamma$, θα είναι:

$$MP^2 + M\Gamma^2 = 2MG^2 + \frac{\Gamma P^2}{2} \quad (4).$$

Το τρίγωνο $\triangle AP\Gamma$ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα $P\Gamma$. Συνεπώς:

$$\Gamma P^2 = AP^2 + A\Gamma^2 \overset{(1)}{=} 4^2 + 8^2 = 80 \quad (5).$$

Η ισότητα (4) γράφεται λόγω της (5):

$$MP^2 + M\Gamma^2 = 2MG^2 + \frac{80}{2} = 2MG^2 + 40 \quad (6)$$

και έτσι η (3) συνεπάγεται ότι:

$$MA^2 + 2MB^2 + 3M\Gamma^2 = 3(2MG^2 + 40) + 24 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow MA^2 + 2MB^2 + 3M\Gamma^2 = 6MG^2 + 144 \quad (7).$$

Το σημείο P είναι σταθερό, αφού διαιρεί το σταθερό τμήμα AB σε σταθερό λόγο. Επομένως και το σημείο G είναι σταθερό σημείο του επιπέδου του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$, αφού είναι το μέσον του σταθερού, ως προς την θέση και το μέγεθος, ευθυγράμμου τμήματος $P\Gamma$.

- **Έστω** $MA^2 + 2.MB^2 + 3.M\Gamma^2 = 168 \overset{(7)}{\Rightarrow} 6MG^2 + 144 = 168 \Rightarrow \cdots \Rightarrow MG = 2.$

  Δηλαδή το μεταβλητό σημείο M του επιπέδου του τριγώνου $\triangle AB\Gamma$ απέχει από το σταθερό σημείο G σταθερή απόσταση, ίση με 2.

  Επομένως το σημείο M γράφει τον κύκλο $(G,\ r = 2)$.

  Αντίστροφα, θεωρώντας τυχαίο σημείο N του κύκλου $(G,\ r = 2)$ έχουμε:

$$NG = 2 \Rightarrow NG^2 = 4 \Rightarrow \cdots \Rightarrow NA^2 + 2NB^2 + 3N\Gamma^2 = 168.$$

  Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος $(G,\ r = 2)$.

Β. 1ο Θεώρημα Πτολεμαίου:

Έστω τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ εγγράψιμο σε κύκλο (O, ρ). Είναι τότε:

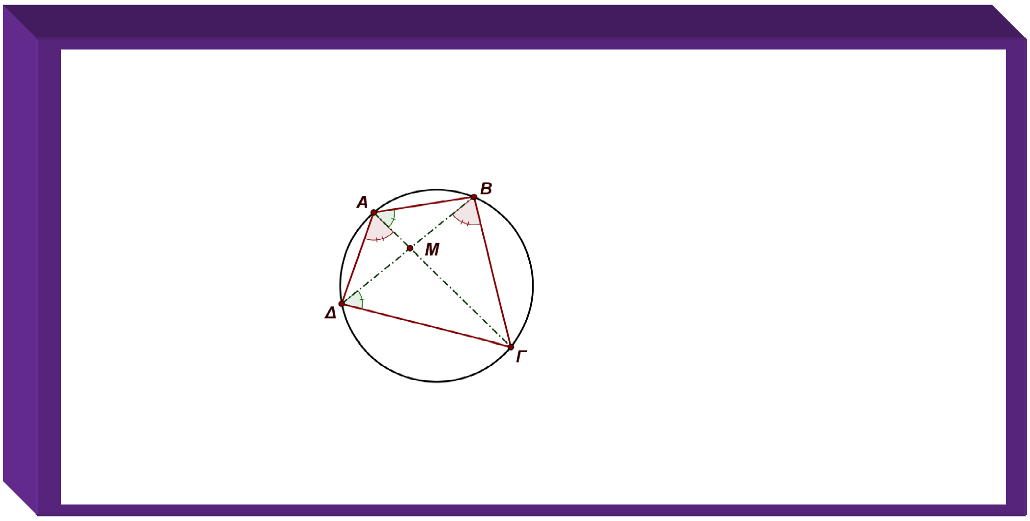
$$AB.\Gamma\Delta + A\Delta.B\Gamma = A\Gamma.B\Delta.$$

Απόδειξη 1η:

Με εφαρμογή του θεωρήματος Stewart στο τρίγωνο $\triangle AB\Delta$ και με τέμνουσα την AM έχουμε: $AB^2.M\Delta + A\Delta^2.MB = AM^2.B\Delta + MB.M\Delta.B\Delta \quad (1).$

Είναι όμως: $MA.M\Gamma = MB.M\Delta \overset{(1)}{\Rightarrow} AB^2.M\Delta + A\Delta^2.MB = AM^2.B\Delta + MA.M\Gamma.B\Delta \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB^2.M\Delta + A\Delta^2.MB = AM.B\Delta(AM + M\Gamma) = AM.A\Gamma.B\Delta \Rightarrow$$



Αλλά: $\left\{\begin{matrix} \triangle\, MA\Delta \approx \triangle\, MB\Gamma \\ \kappa\alpha\iota \\ \triangle\, MAB \approx \triangle\, M\Gamma\Delta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{M\Delta}{M\Gamma} = \dfrac{A\Delta}{B\Gamma} \\ \kappa\alpha\iota \\ \dfrac{MA}{M\Delta} = \dfrac{MB}{M\Gamma} = \dfrac{AB}{\Gamma\Delta} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \dfrac{MB}{MA} = \dfrac{B\Gamma}{A\Delta} \\ \kappa\alpha\iota \\ \dfrac{M\Delta}{MA} = \dfrac{\Gamma\Delta}{AB} \end{matrix}\right\} \quad (3).$

Η ισότητα (2) $\lambda\acute{o}\gamma\omega\ \tau\omega\nu$ (3) ***γράφεται:***

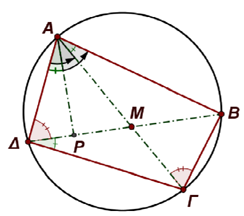
$$AB^2.\frac{\Gamma\Delta}{AB} + A\Delta^2.\frac{B\Gamma}{A\Delta} = A\Gamma.B\Delta \Rightarrow AB.\Gamma\Delta + A\Delta.B\Gamma = A\Gamma.B\Delta.$$

Απόδειξη 2η:

Κατασκευάζουμε ημιευθεία Ax ***που τέμνει την*** ΔB ***στο σημείο*** P, ***έτσι ώστε να είναι:***

$\Delta\hat{A}P = \Gamma\hat{A}B.$ ***Είναι τότε:***

$$\left\{\begin{matrix} \Delta\hat{A}P = \Gamma\hat{A}B \\ \kappa\alpha\iota \\ A\hat{\Delta}P = A\hat{\Gamma}B \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle\, A\Delta P \approx \triangle\, AB\Gamma \Rightarrow \frac{A\Delta}{A\Gamma} = \frac{\Delta P}{B\Gamma} = \frac{AP}{AB} \Rightarrow A\Delta.B\Gamma = \Delta P.A\Gamma \quad (1') \quad \kappa\alpha\iota$$



$$\left\{\begin{matrix} \Delta\hat{A}\Gamma = P\hat{A}B \\ \kappa\alpha\iota \\ A\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{B}P \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle\, A\Delta\Gamma \approx \triangle\, APB \Rightarrow \frac{A\Delta}{AP} = \frac{\Delta\Gamma}{PB} = \frac{A\Gamma}{AB} \Rightarrow AB.\Gamma\Delta = PB.A\Gamma \quad (2').$$

Από τις $(1')$ $\kappa\alpha\iota$ $(2') \overset{(+)}{\Rightarrow} AB.\Gamma\Delta + A\Delta.B\Gamma = PB.A\Gamma + \Delta P.A\Gamma = (PB + P\Delta)A\Gamma \Rightarrow$

$$\Rightarrow AB.\Gamma\Delta + A\Delta.B\Gamma = A\Gamma.B\Delta.$$

C. 2ο Θεώρημα Πτολεμαίου:

Έστω τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ που δ ε ν είναι εγγράψιμο σε κύκλο. Είναι τότε:

$$ΑΒ.ΓΔ + ΑΔ.ΒΓ > ΑΓ.ΒΔ.$$

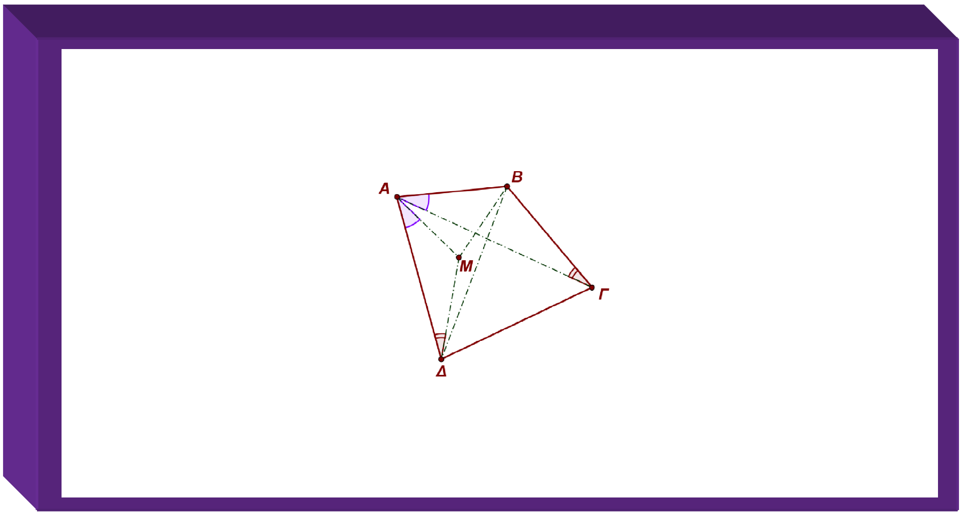
Απόδειξη:

Κατασκευάζουμε ημιευθείες $Αx$ και $Δψ$ που τέμνονται στο σημείο $Μ$ έτσι ώστε να είναι: $Δ\widehat{Α}x = Γ\widehat{Α}Β$ και $Α\widehat{Δ}ψ = Α\widehat{Γ}Β$.

Σημειώνεται ότι το σημείο $Μ$ δεν είναι σημείο της $ΒΔ$, γιατί τότε το $ΑΒΓΔ$ θα ήταν εγγράψιμο σε κύκλο.

Είναι τότε:

$$\left.\begin{cases} Δ\widehat{Α}Μ = Γ\widehat{Α}Β \\ και \\ Α\widehat{Δ}Μ = Α\widehat{Γ}Β \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle\ ΑΔΜ \approx \triangle\ ΑΒΓ \Rightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΓ} = \frac{ΔΜ}{ΒΓ} = \frac{ΑΜ}{ΑΒ} \Rightarrow ΑΔ.ΒΓ = ΔΜ.ΑΓ \quad (1) \quad και$$



$$\left.\begin{cases} Δ\widehat{Α}Γ = Μ\widehat{Α}Β \\ και \\ \dfrac{ΑΔ}{ΑΓ} = \dfrac{ΑΜ}{ΑΒ} \end{cases}\right\} \Rightarrow \triangle\ ΑΔΓ \approx \triangle\ ΑΒΜ \Rightarrow \frac{ΑΔ}{ΑΜ} = \frac{ΔΓ}{ΜΒ} = \frac{ΑΓ}{ΑΒ} \Rightarrow ΑΒ.ΓΔ = ΒΜ.ΑΓ \quad (2)$$

Από τις $\boldsymbol{(1)}$ ***και*** $\boldsymbol{(2)} \overset{(+)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \boldsymbol{AB.\Gamma\Delta + A\Delta.B\Gamma = BM.A\Gamma + \Delta M.A\Gamma = (MB + M\Delta)A\Gamma} > \Delta B.A\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{AB.\Gamma\Delta + A\Delta.B\Gamma} > A\Gamma.B\Delta.$$

D. Θεώρημα Viet:

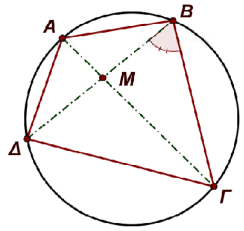
Σε κάθε εγγράψιμο σε κύκλο $\boldsymbol{(O,\rho)}$ ***τετράπλευρο*** $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$***, ισχύει:***

$$\boldsymbol{\frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{AB.A\Delta + \Gamma B.\Gamma\Delta}{BA.B\Gamma + \Delta A.\Delta\Gamma}}$$

Απόδειξη:

Είναι γνωστό ότι:

$$\boldsymbol{\left\{ \begin{matrix} (AB\Delta) = \dfrac{AB.A\Delta.B\Delta}{4\rho} \\ \kappa\alpha\iota \\ (\Gamma B\Delta) = \dfrac{\Gamma B.\Gamma\Delta.B\Delta}{4\rho} \end{matrix} \right\} \quad (1) \quad \kappa\alpha\iota \quad \left\{ \begin{matrix} (AB\Gamma) = \dfrac{AB.A\Gamma.B\Gamma}{4\rho} \\ \kappa\alpha\iota \\ (A\Delta\Gamma) = \dfrac{A\Delta.A\Gamma.\Delta\Gamma}{4\rho} \end{matrix} \right\} \quad (2).}$$



Αλλά: $(\boldsymbol{AB\Delta}) + (\boldsymbol{\Gamma B\Delta}) = (\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}) = (\boldsymbol{AB\Gamma}) + (\boldsymbol{A\Delta\Gamma}) \overset{(1,2)}{\Rightarrow}$

$$\Rightarrow \frac{AB.A\Delta.B\Delta}{4\rho} + \frac{\Gamma B.\Gamma\Delta.B\Delta}{4\rho} = \frac{AB.A\Gamma.B\Gamma}{4\rho} + \frac{A\Delta.A\Gamma.\Delta\Gamma}{4\rho} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (AB.A\Delta + \Gamma B.\Gamma\Delta).B\Delta = (BA.B\Gamma + \Delta A.\Delta\Gamma).A\Gamma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{AB.A\Delta + \Gamma B.\Gamma\Delta}{BA.B\Gamma + \Delta A.\Delta\Gamma}.$$

Παρατήρηση: ***Όταν είναι γνωστές οι πλευρές εγγράψιμου σε κύκλο τετραπλεύρου*** $\boldsymbol{AB\Gamma\Delta}$, ***τότε μπορούμε να υπολογίσουμε τις διαγώνιες του*** $\boldsymbol{A\Gamma}$ ***και*** $\boldsymbol{B\Delta}$, ***αφού οι ισότητες:***

$$A\Gamma.B\Delta = AB.\Gamma\Delta + A\Delta.B\Gamma \quad \text{και} \quad \frac{A\Gamma}{B\Delta} = \frac{AB.A\Delta + \Gamma B.\Gamma\Delta}{BA.B\Gamma + \Delta A.\Delta\Gamma}$$

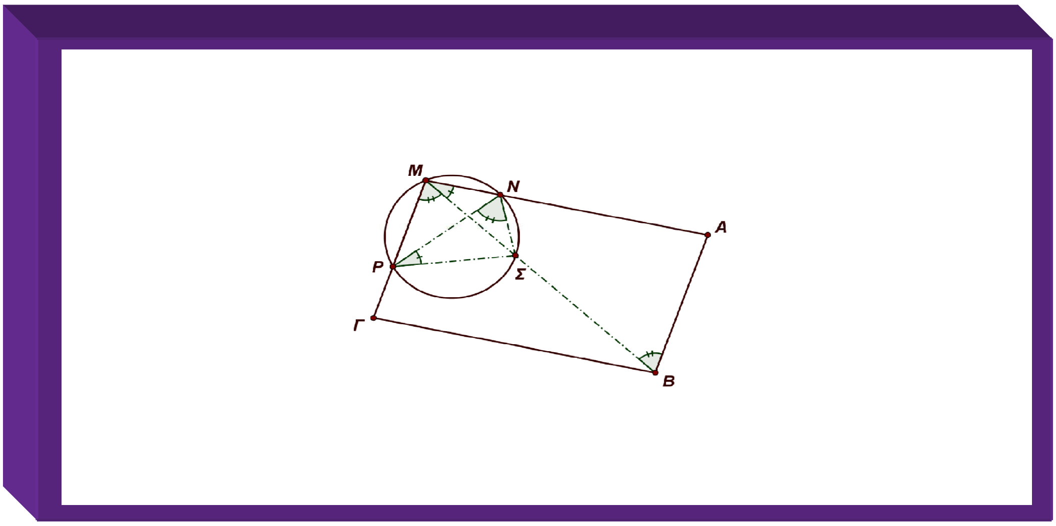
αποτελούν σύστημα με αγνώστους $\boldsymbol{A\Gamma}$ ***και*** $\boldsymbol{B\Delta}$.

Άσκηση 1η: ***Δίδεται κύκλος*** $(\boldsymbol{O},\ \boldsymbol{\rho})$ ***και σημείο του*** $\boldsymbol{M}$. ***Κατασκευάζουμε παραλληλόγραμμο*** $\boldsymbol{MAB\Gamma}$ ***του οποίου οι πλευρές*** $\boldsymbol{MA},\ \boldsymbol{M\Gamma}$ ***και η διαγώνιος του*** $\boldsymbol{MB}$ ***επανατέμνουν τον κύκλο στα σημεία του*** $\boldsymbol{N},\ \boldsymbol{P}$ ***και*** $\boldsymbol{\Sigma}$ ***αντίστοιχα.*** ***Να δείξετε ότι:***

$$MA.MN + M\Gamma.MP = MB.M\Sigma$$

Απόδειξη:

Με βάση το πρώτο θεώρημα του Πτολεμαίου για το εγγράψιμο τετράπλευρο $\boldsymbol{MN\Sigma P}$ ***είναι:***



Είναι επίσης: $\left\{\begin{matrix} N\widehat{P}\Sigma = B\widehat{M}A \\ \kappa\alpha\iota \\ P\widehat{N}\Sigma = \Gamma\widehat{M}B = M\widehat{B}A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \triangle\, NP\Sigma \approx \triangle\, AMB \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{NP}{MB} = \frac{N\Sigma}{AB} = \frac{\Sigma P}{MA} = x \Rightarrow NP = x.MB,\ \ N\Sigma = x.AB \quad \kappa\alpha\iota \quad \Sigma P = x.MA,\quad x > 0 \quad (2).$$

Από τις (1) $\kappa\alpha\iota$ (2) ***παίρνουμε:***

$$x.MN.MA + x.MP.AB = x.M\Sigma.MB \overset{AB=M\Gamma}{\Rightarrow} MA.MN + M\Gamma.MP = MB.M\Sigma.$$