Γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ά   Θ έ μ α τ α

Ξεχασμένα Θέματα Ευκλείδειας Γεωμετρίας

"για να θυμούνται οι παλαιότεροι και να μαθαίνουν οι νεότεροι".

Θ Ε Μ Α 1ο:

Εξωτερικά τριγώνου $ΑΒΓ$ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα: $ΑΒΗΖ$, $ΑΓΔΕ$ και $ΒΓΚΛ$.

Να δείξετε ότι:

a) *Τα ευθύγραμμα τμήματα $ΒΕ$ και $ΓΖ$ είναι ίσα και κάθετα.*

b) *Η διάμεσος $ΑΘ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ προεκτεινόμενη προς το μέρος του $Α$ τέμνει κάθετα την $ΖΕ$ και είναι: $ΖΕ = 2ΑΘ$.*

c) *Το ύψος $ΑΙ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ προεκτεινόμενο προς το μέρος του $Α$ διέρχεται από το μέσο της $ΖΕ$.*

d) *Οι ευθείες $ΒΔ$, $ΓΗ$ και $ΑΙ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

e) *Οι ευθείες $ΖΔ$, $ΕΗ$ και η διάμεσος $ΑΘ$ του τριγώνου $ΑΒΓ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

f) *Οι περιγεγραμμένες περιφέρειες των τετραγώνων $ΑΒΗΖ$, $ΑΓΔΕ$ και οι ευθείες $ΒΕ, ΓΖ, ΗΔ$ και $ΑΜ$, όπου $Μ$ είναι το κέντρο του τετραγώνου $ΒΓΚΛ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

g) *Αν $Λ$ και $Κ$ είναι τα κέντρα των τετραγώνων $ΑΓΔΕ$ και $ΑΒΗΖ$ αντίστοιχα, τότε:*
Οι ευθείες $ΑΜ$, $ΒΛ$ και $ΓΚ$ διέρχονται από το ίδιο σημείο V, που είναι ορθόκεντρο του τριγώνου $ΚΛΜ$ και το οποίο λέγεται "σημείο Vecten".

h) *Το τρίγωνο $ΠΒΓ$ όπου $Π$ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος $ΗΔ$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.*

i) *Έστω $Θ$ και $Ι_1$ τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $ΒΓ$ και $ΖΕ$ αντίστοιχα και $Κ$ και $Λ$ τα κέντρα των τετραγώνων $ΑΓΔΕ$, $ΑΒΗΖ$ αντίστοιχα. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο $ΘΚΙ_1Λ$ είναι τετράγωνο.*

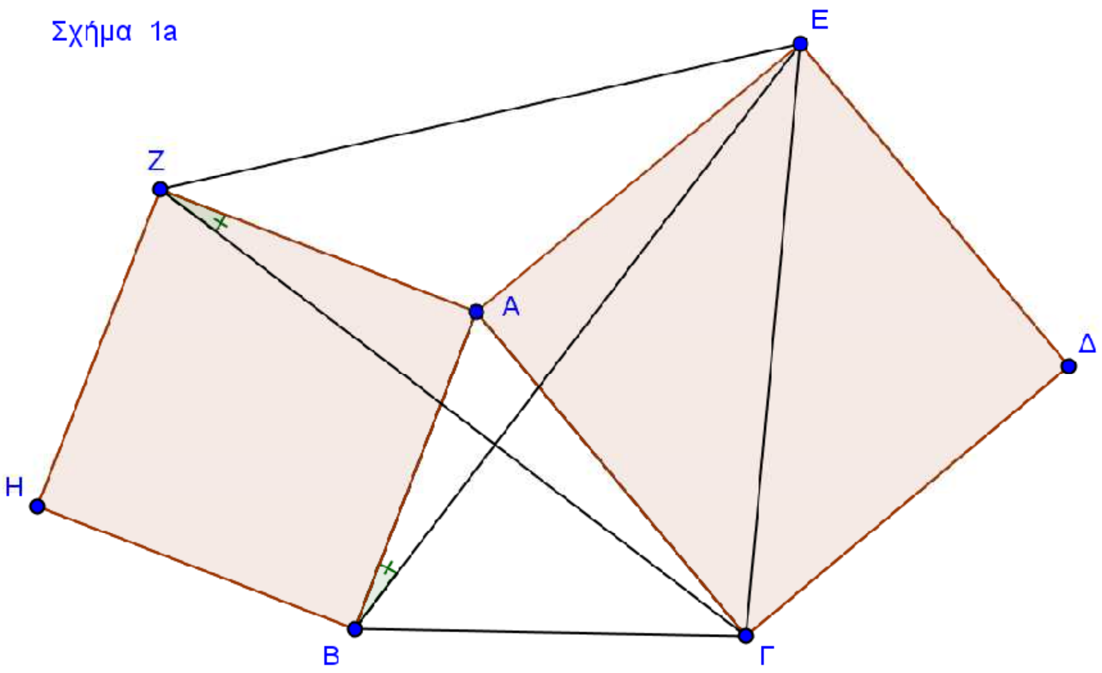
Λ ύ σ η:

a) *Τα τρίγωνα* $AB E$ $\kappa\alpha\iota$ $A\Gamma Z$ *έχουν:* $\left\{\begin{matrix} AB = AZ \\ AE = A\Gamma \\ B\hat{A}E = 90° + B\hat{A}\Gamma = \Gamma\hat{A}Z \end{matrix}\right\}.$

Επομένως είναι ίσα και θα έχουν και:

$$BE = \Gamma Z \quad (1) \quad \kappa\alpha\iota \quad A\hat{E}B = A\hat{\Gamma}Z \quad (2).$$

Σχήμα 1a

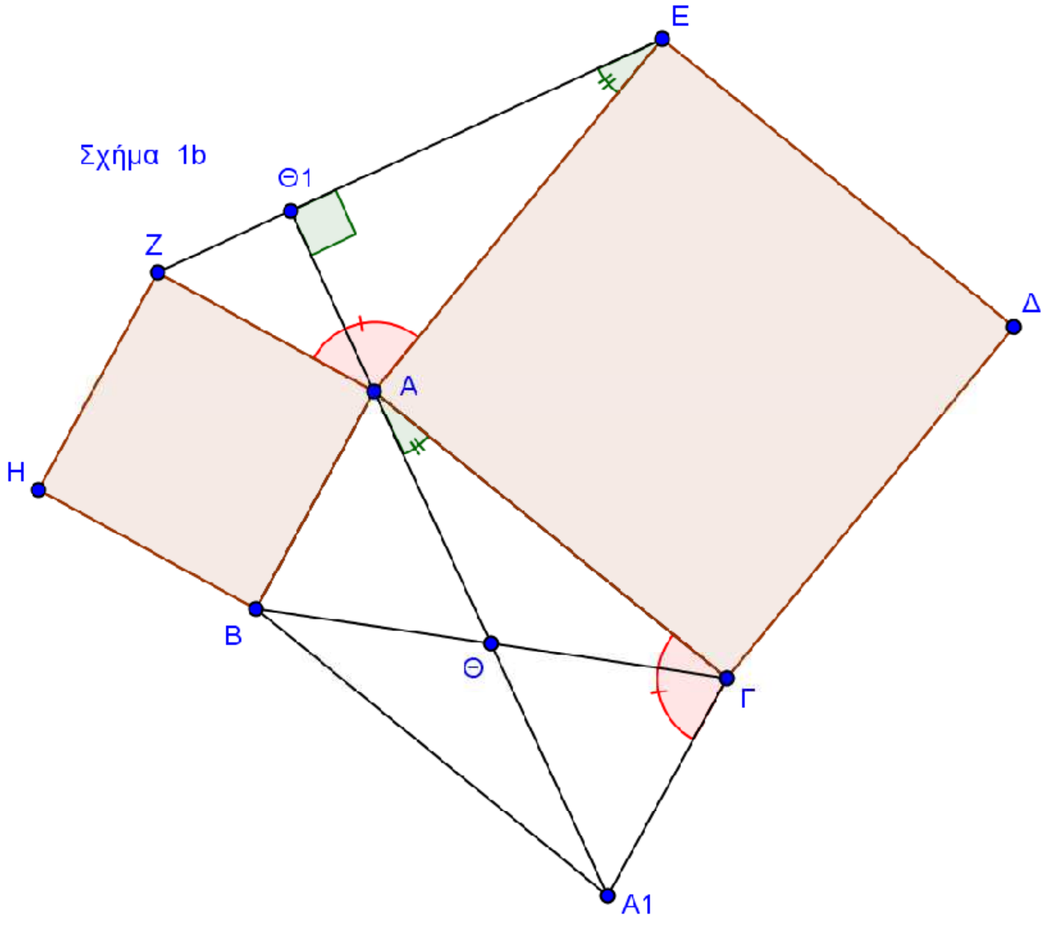


Άρα: $B\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}Z = A\hat{E}\Gamma - A\hat{E}B + A\hat{\Gamma}E + A\hat{\Gamma}Z \Rightarrow$

$$B\hat{E}\Gamma + E\hat{\Gamma}Z = 45° - A\hat{E}B + 45° + A\hat{\Gamma}Z \overset{(2)}{=} 90° \Rightarrow BE \perp \Gamma Z \quad (3).$$

Από τις σχέσεις (2) και (3) συμπεραίνουμε ότι: $BE =\perp \Gamma Z$.

b) *Στο "σχήμα 1b" που ακολουθεί προεκτείνουμε, προς το μέρος του σημείου* Θ, *την διάμεσο* $A\Theta$ *του τριγώνου* $AB\Gamma$ *κατά τμήμα* $\Theta A_1 = A\Theta$.



Έτσι, το τετράπλευρο $ABA_1\Gamma$ *είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως:*

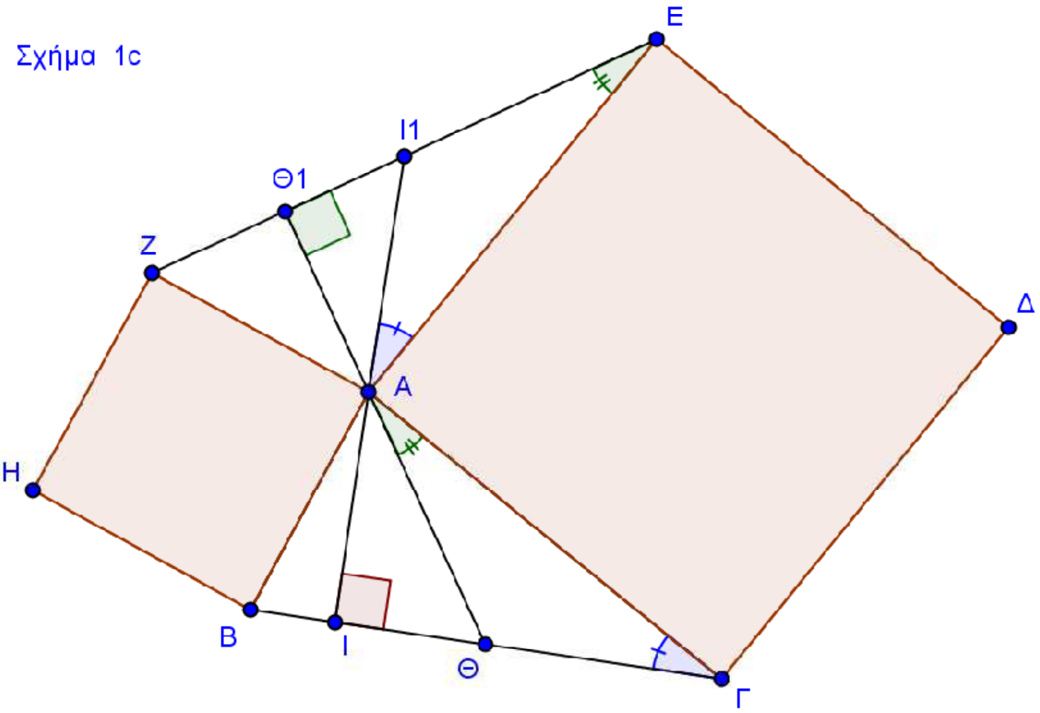
$$\Gamma A_1 = AB = AZ \quad \kappa\alpha\iota \quad A\hat{\Gamma}A_1 = 180° - B\hat{A}\Gamma = Z\hat{A}E \qquad (1).$$

Τα τρίγωνα $A\Gamma A_1$ $\kappa\alpha\iota$ AZE *έχουν:* $\left\{\begin{matrix} A\Gamma = AE \\ \Gamma A_1 = AZ \\ A\hat{\Gamma}A_1 = Z\hat{A}E \end{matrix}\right\}$. *Επομένως είναι ίσα και ως εκ τούτου είναι:*

$$A_1\hat{A}\Gamma = \Theta\hat{A}\Gamma = A\hat{E}Z \quad (2) \qquad \kappa\alpha\iota \qquad ZE = AA_1 = 2A\Theta \qquad (3).$$

Έτσι, $A\hat{E}Z + E\hat{A}\Theta_1 \overset{(2)}{=} A_1\hat{A}\Gamma + E\hat{A}\Theta_1 = 90° \Rightarrow A\Theta_1 \perp ZE \qquad (4).$

c) *Έστω ότι η προέκταση, προς το μέρος του Α, του ύψους* AI *του τριγώνου* $AB\Gamma$ *(σχήμα 1c) τέμνει την* ZE *στο σημείο* I_1.



Από το ερώτημα 1a έχουμε διαπιστώσει ότι: $\Theta\hat{A}\Gamma = A\hat{E}Z \quad \kappa\alpha\iota \quad EZ = 2A\Theta \quad (1).$

Οι γωνίες $A\hat{\Gamma}\Theta \quad \kappa\alpha\iota \quad E\hat{A}I_1$ *είναι οξείες με πλευρές κάθετες. Επομένως* $A\hat{\Gamma}\Theta = E\hat{A}I_1 \quad (2).$

Τα τρίγωνα $A\Theta\Gamma \quad \kappa\alpha\iota \quad AEI_1$ *έχουν:* $\left\{\begin{matrix} A\Gamma = AE \\ A\hat{\Gamma}\Theta = E\hat{A}I_1 \\ \Theta\hat{A}\Gamma = A\hat{E}I_1 \end{matrix}\right\}.$

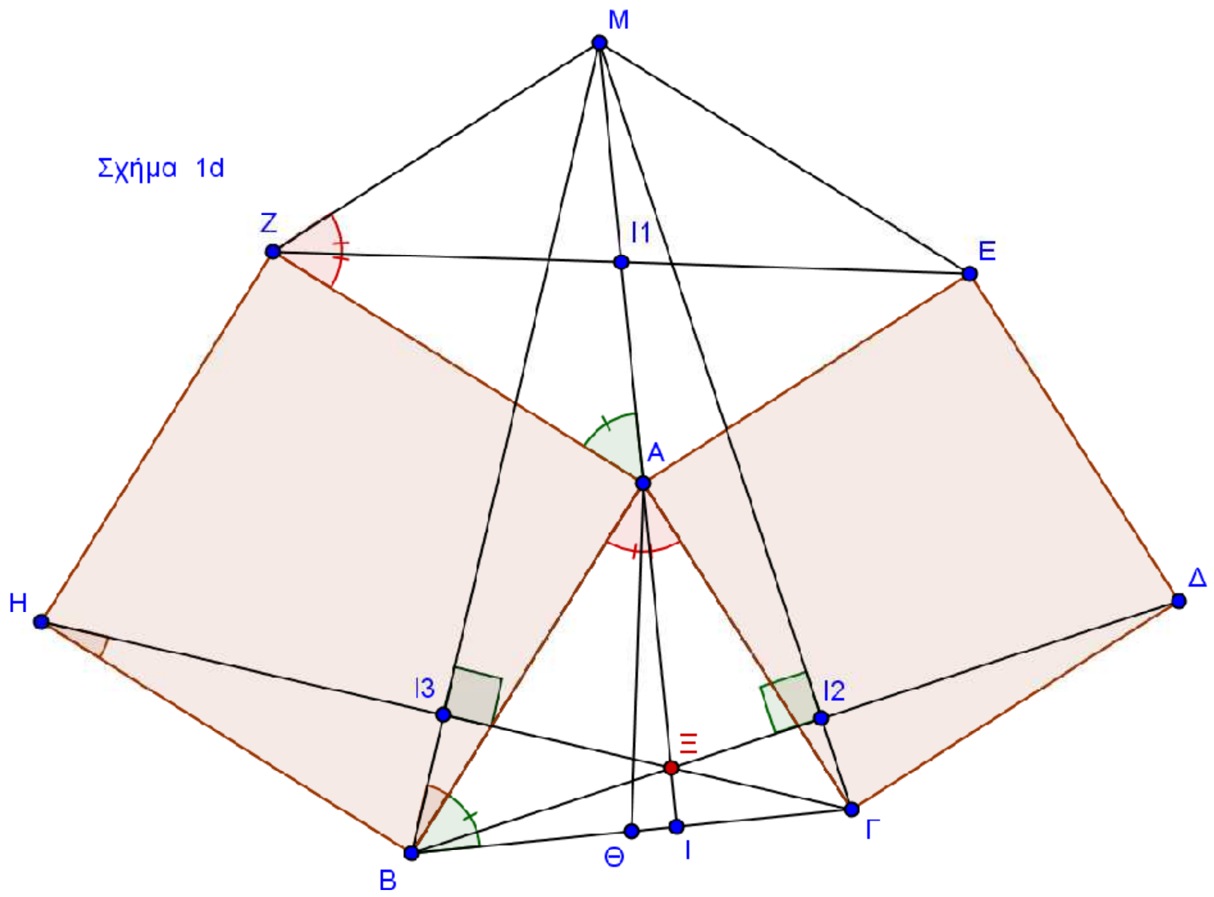
Άρα είναι ίσα και συνεπώς θα είναι και:

$$A\Theta = EI_1 \Rightarrow EI_1 \overset{(1)}{=} \frac{EZ}{2}.$$

Δηλαδή το σημείο I_1 *είναι μέσο του ευθυγράμμου τμήματος* EZ.

d) *Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο* $AEMZ$ $(\sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ 1d)$. *Είναι τότε:*

$$A\hat{Z}M = 180° - Z\hat{A}E = B\hat{A}\Gamma \qquad (1).$$



Η διαγώνιος MA *του παραλληλογράμμου* $AEMZ$ *διέρχεται από το μέσο* I_1 *του ευθυγράμμου τμήματος* ZE. *Άρα το τμήμα* AI_1 *είναι διάμεσος του τριγώνου* AZE.

Σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα η προέκταση του I_1A *τέμνει κάθετα το ευθύγραμμο τμήμα* $B\Gamma$ $\sigma\tau o\ \sigma\eta\mu\epsilon\acute{\iota}o\ I$. *Είναι δηλαδή:* $MI \perp B\Gamma$ (2).

Τα τρίγωνα AZM $\kappa\alpha\iota$ $AB\Gamma$ *έχουν:* $\left\{\begin{matrix} AZ = AB \\ AE = A\Gamma \\ A\hat{Z}M \overset{(1)}{=} B\hat{A}\Gamma \end{matrix}\right\}$. *Άρα είναι ίσα και επομένως θα είναι και:*

$AM = B\Gamma, \quad Z\hat{A}M = A\hat{B}\Gamma \qquad (3).$

Τα τρίγωνα $HB\Gamma$ $\kappa\alpha\iota$ ABM *είναι ίσα αφού:*

$$HB = AB,\quad B\Gamma \overset{(3)}{=} AM \quad \kappa\alpha\iota \quad H\hat{B}\Gamma = 90^\circ + A\hat{B}\Gamma \overset{(3)}{=} 90^\circ + Z\hat{A}M = B\hat{A}M.$$

Λόγω της ισότητας των τριγώνων $HB\Gamma$ $\kappa\alpha\iota$ ABM *θα είναι και:*

$$B\hat{H}\Gamma = A\hat{B}M,\quad H\Gamma = MB \qquad (4).$$

Έτσι, $B\hat{H}\Gamma + H\hat{B}M = A\hat{B}M + H\hat{B}M = 90^\circ \Rightarrow H\Gamma \perp MB \qquad (5).$

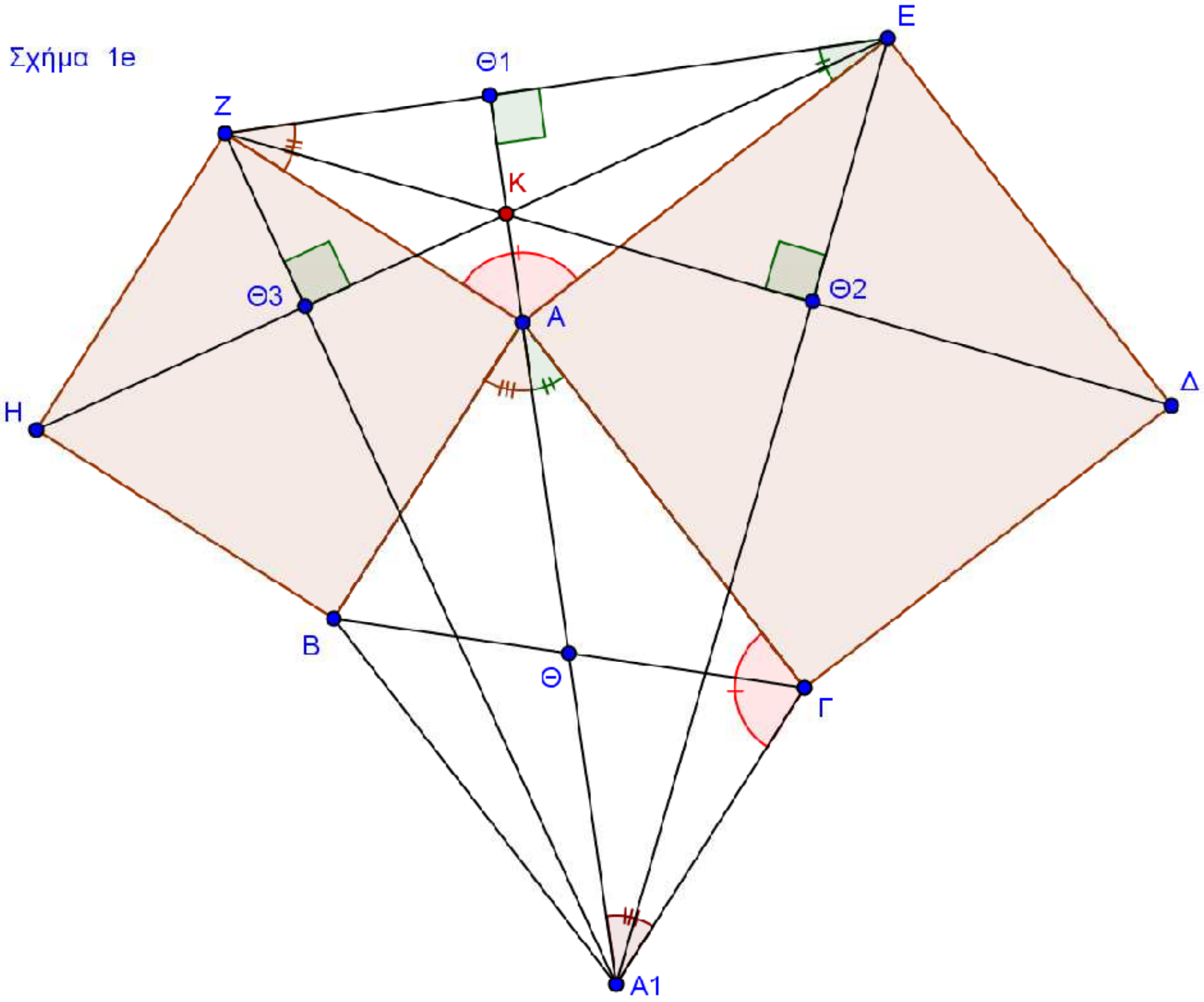
Από τις (4) και (5) έχουμε: $H\Gamma = \perp MB. \qquad (6).$

Όμοια αποδεικνύεται ότι: $B\Delta = \perp M\Gamma \qquad (7).$

Στο τρίγωνο $MB\Gamma$ *τα ευθύγραμμα τμήματα* $MI,\ BI_2$ $\kappa\alpha\iota$ ΓI_3 *είναι ύψη του. Επομένως διέρχονται από το ίδιο σημείο* Ξ *που είναι το ορθόκεντρο του.*

e) *Κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο* $ABA_1\Gamma$ $(\sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ \ 1e)$.

Είναι τότε: $A\hat{\Gamma}A_1 = 180° - B\hat{A}\Gamma = Z\hat{A}E \quad (1)$.



Το ευθύγραμμο τμήμα $A\Theta$ *είναι τότε διάμεσος του τριγώνου* $BA\Gamma$. *Επομένως (σύμφωνα με το πρώτο ερώτημα) η προέκταση του τέμνει την* ZE *κάθετα, έστω στο σημείο* Θ_1.

Είναι δηλαδή: $A_1\Theta_1 \perp EZ \quad (2)$.

Τα τρίγωνα $A\Gamma A_1$ *και* AZE *έχουν:* $\left\{\begin{matrix} A\Gamma = AE \\ \Gamma A_1 = AZ \\ A\hat{\Gamma}A_1 \overset{(1)}{=} Z\hat{A}E \end{matrix}\right\}$. *Είναι επομένως ίσα και ως εκ τούτου θα*

είναι και: $AA_1 = ZE \ \ \kappa\alpha\iota \ \ A\widehat{A_1}\Gamma = A\hat{Z}E \ \overset{\Gamma A_1 /\!/ AB}{\Rightarrow} \ AA_1 = ZE \ \ \kappa\alpha\iota \ \ B\hat{A}A_1 = A\hat{Z}E \quad (3)$.

Αλλά και τα τρίγωνα ZEH *και* AA_1Z *είναι ίσα, αφού:*

$$ZH = AZ, \quad ZE = AA_1 \quad \kappa\alpha\iota \quad H\hat{Z}E = 90° + A\hat{Z}E \overset{(3)}{=} 90° + B\hat{A}A_1 = Z\hat{A}A_1.$$

Επομένως θα είναι και: $Z\hat{H}E = A\hat{Z}A_1 \quad \kappa\alpha\iota \quad EH = A_1Z \quad (4).$

Έτσι, $Z\hat{H}E + H\hat{Z}A_1 = A\hat{Z}A_1 + H\hat{Z}A_1 = 90° \Rightarrow EH \perp A_1Z \quad (5).$

Από τις (4) και (5) έχουμε: $EH =\perp A_1Z \quad (6).$

Όμοια αποδεικνύεται ότι: $Z\Delta =\perp A_1E \quad (7).$

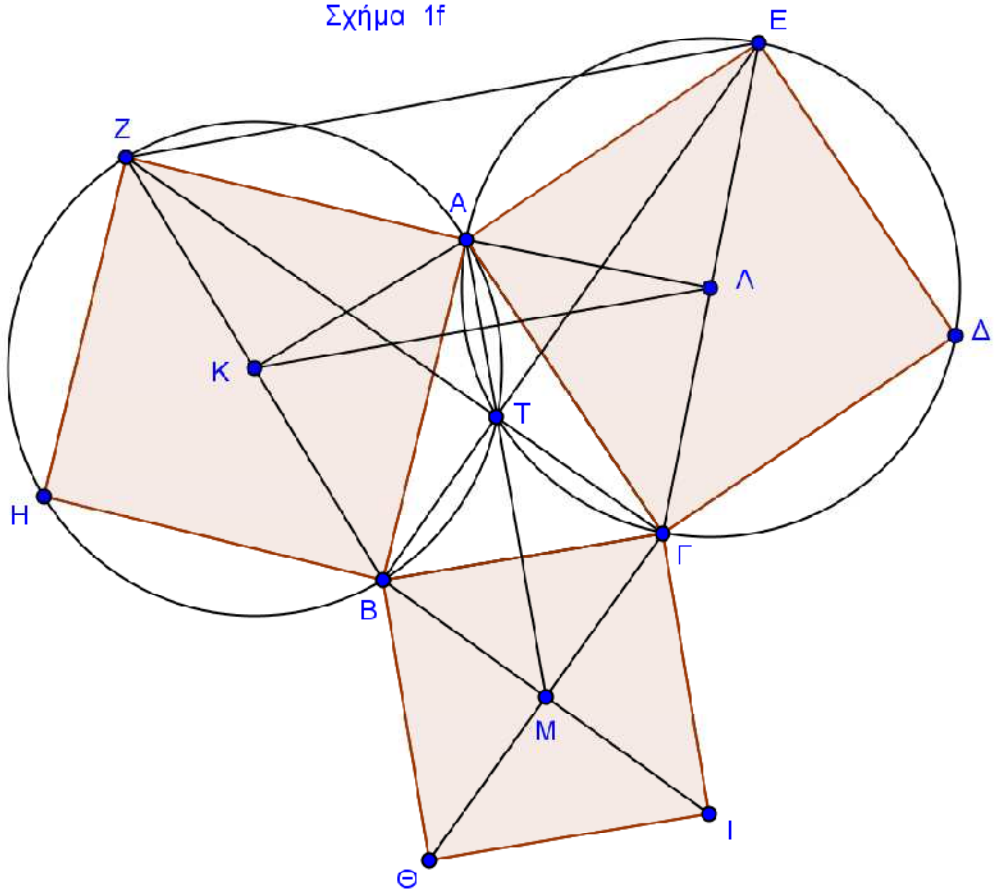
Έτσι, στο τρίγωνο A_1ZE *τα τμήματα* $A_1\Theta_1$, $Z\Theta_3$ $\kappa\alpha\iota$ $E\Theta_2$ *είναι ύψη του. Επομένως διέρχονται από το ίδιο σημείο* K *που είναι το ορθόκεντρο του.*

f) *Υποθέτουμε ($\sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ 1f$) ότι η γωνία $\hat{A}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ δεν είναι ορθή, δηλαδή ότι:* $B\hat{A}\Gamma \neq 90°$.

Τότε τα σημεία K, A $\kappa\alpha\iota$ Λ θα είναι μη συνευθειακά και συνεπώς θα ορίζουν τρίγωνο.

Επομένως: $K\Lambda < AK + A\Lambda \qquad (1)$.

Σχήμα 1f



Λόγω της (1) οι περιγεγραμμένες περιφέρειες των τετραγώνων $ABHZ$ $\kappa\alpha\iota$ $A\Gamma\Delta E$ επανατέμνονται, ας υποθέσουμε στο σημείο T.

Είναι: $A\hat{T}B + A\hat{T}E = A\hat{T}Z + Z\hat{T}B + A\hat{\Gamma}E = A\hat{B}Z + Z\hat{T}B + A\hat{\Gamma}E = 45° + 90° + 45° \Rightarrow$

$$\Rightarrow A\hat{T}B + A\hat{T}E = 180°.$$

Επομένως τα σημεία B, T $\kappa\alpha\iota$ E είναι συνευθειακά, δηλαδή η ευθεία BE διέρχεται από το σημείο T.

Όμοια, αποδεικνύεται ότι:

- $\Gamma\hat{T}A + A\hat{T}Z = 180°$. *Άρα η* ΓZ *διέρχεται από το σημείο* T *και*
- $A\hat{T}H + A\hat{T}\Delta = 90° + 90° = 180°$. *Επομένως η ευθεία* $H\Delta$ *διέρχεται από το σημείο* T.

Είναι επίσης: $A\hat{T}B + B\hat{T}M = A\hat{T}B + A\hat{Z}B = 135° + 45° = 180°$. *Επομένως και η ευθεία* AM *διέρχεται από το σημείο* T.

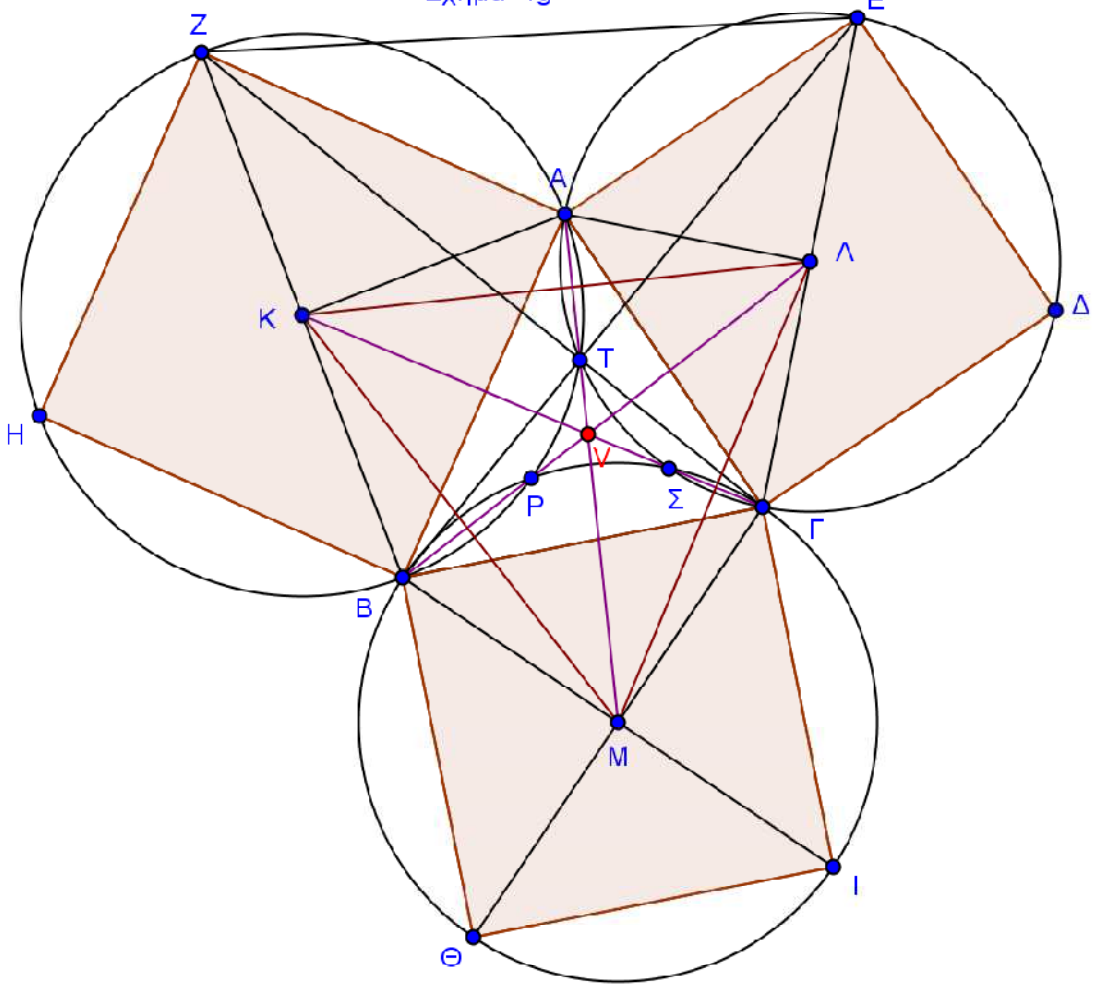
Αν η γωνία $\hat{A}$ *του τριγώνου* $AB\Gamma$ *είναι ορθή, δηλαδή* $B\hat{A}\Gamma = 90°$ *τότε:*

Οι ευθείες BE, ΓZ, $H\Delta$ $\kappa\alpha\iota$ AM *διέρχονται από την κορυφή* A *της ορθής γωνίας του τριγώνου* $AB\Gamma$.

Άρα σε κάθε περίπτωση οι ευθείες BE, ΓZ, $H\Delta$ $\kappa\alpha\iota$ AM *και οι περιγεγραμμένες περιφέρειες των τετραγώνων* $ABHZ$ $\kappa\alpha\iota$ $A\Gamma\Delta E$ *διέρχονται από το ίδιο σημείο.*

g) *Το ευθύγραμμο τμήμα* AT, $(\sigma\chi\acute{\eta}\mu\alpha\ 1g)$, *είναι η κοινή χορδή των περιγγεγραμμένων περιφερειών των τετραγώνων* $ABHZ$ $\kappa\alpha\iota$ $A\Gamma\Delta E$. *Τα σημεία* A, T $\kappa\alpha\iota$ M, *όπως απεδείχθη στο ερώτημα 1d, είναι συνευθειακά. Επομένως είναι:* $AM \perp K\Lambda$ (1).

Σχήμα 1g



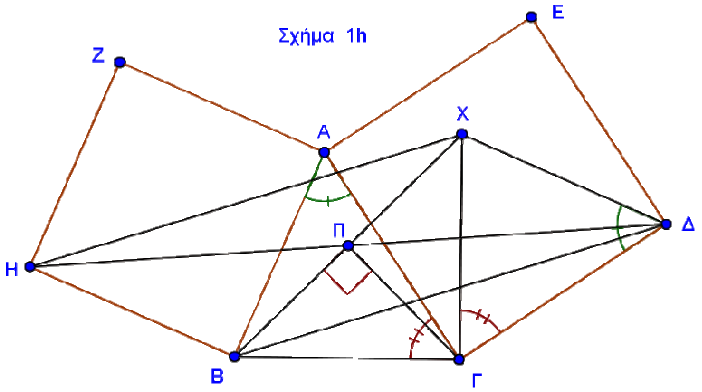
Όμοια, $BP \perp KM$ (2) $\kappa\alpha\iota$ $\Gamma\Sigma \perp \Lambda M$ (3).

Σύμφωνα με το ερώτημα 1d τα σημεία B, P $\kappa\alpha\iota$ Λ *καθώς και τα σημεία* Γ, Σ $\kappa\alpha\iota$ K *είναι συνευθειακά. Επομένως* $B\Lambda \perp KM$ $(2΄)$ $\kappa\alpha\iota$ $\Gamma K \perp \Lambda M$ $(3΄)$.

Έτσι, οι ευθείες AM, $B\Lambda$ $\kappa\alpha\iota$ ΓK *είναι φορείς των υψών του τριγώνου* $K\Lambda M$ *και συνεπώς διέρχονται από το ίδιο σημείο, δηλαδή το ορθόκεντρό του* V. *Το σημείο αυτό ονομάζεται σημείο Vecten.*

h) *Έστω, (σχήμα 1h), X το συμμετρικό ως προς το σημείο Π του σημείου B. Τότε το τετράπλευρο $HB\Delta X$ είναι παραλληλόγραμμο. Υποθέτουμε ακόμη ότι $B\hat{A}\Gamma < 90°$.*

Επομένως $\Pi \ \mu έ\sigma o \ H\Delta \ \kappa \alpha \iota \ BX,$ $X\Delta =\!\!\!/\!\!/ \, HB$ δηλαδή $X\Delta = AB$ και $X\Delta \perp AB$.



Οι γωνίες $\Gamma\hat{\Delta}X$ και $B\hat{A}\Gamma$ είναι οξείες με πλευρές κάθετες. Επομένως $\Gamma\hat{\Delta}X = B\hat{A}\Gamma$ (1).

Τα τρίγωνα $\Gamma\Delta X$ και $AB\Gamma$ έχουν: $\left\{\begin{matrix} \Gamma\Delta = A\Gamma \\ \Delta X = AB \\ \Gamma\hat{\Delta}X = B\hat{A}\Gamma \end{matrix}\right\}$. Άρα είναι ίσα και συνεπώς θα έχουν και:

$$\Gamma X = B\Gamma \quad (2) \quad \kappa\alpha\iota \quad X\hat{\Gamma}\Delta = A\hat{\Gamma}B \quad (3).$$

Είναι τότε: $B\hat{\Gamma}X = B\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}X = X\hat{\Gamma}\Delta + A\hat{\Gamma}X = 90°$.

Επομένως το τρίγωνο $B\Gamma X$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, με $\Gamma X = B\Gamma$, και επειδή το ευθύγραμμο τμήμα $\Gamma\Pi$ είναι διάμεσος του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του θα είναι:

$$\Gamma\Pi = \frac{BX}{2} = B\Pi \qquad (4).$$

Άρα το τρίγωνο $B\Pi\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

Με παρόμοιους συλλογισμούς αποδεικνύουμε ότι το τρίγωνο $B\Pi\Gamma$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές όταν $B\hat{A}\Gamma \geq 90°$.