Γ ε ω μ ε τ ρ ι κ ά   Θ έ μ α τ α

Ξεχασμένα Θέματα Γεωμετρίας «για να θυμούνται οι παλαιότεροι και να μαθαίνουν οι νεότεροι».

1. Εξωτερικά του ορθογωνίου τριγώνου $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$«$\hat{A} = 90°$» κατασκευάζουμε τα τετράγωνα: $AB\Delta E$ $και$ $A\Gamma ZH$. Έστω Θ το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος ΔZ. Να δείξετε ότι:

a) Τα σημεία $H,\ A$ $και$ Δ είναι συνευθειακά

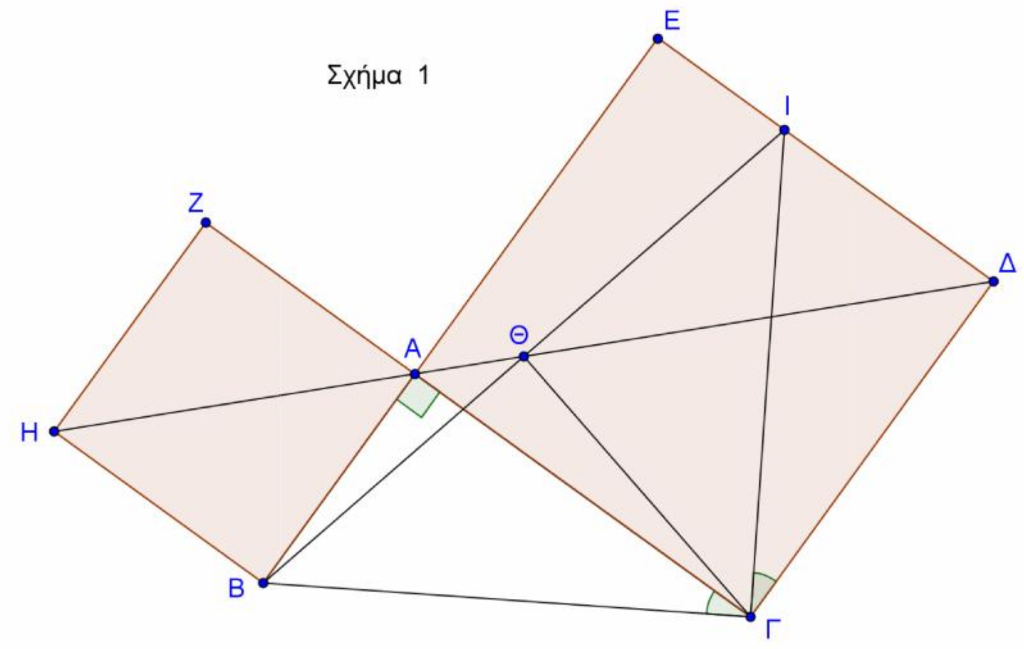
b) Το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Theta B\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

<u>Λ ύ σ η:</u>

a) Από το σχήμα 1 που ακολουθεί διαπιστώνουμε ότι:

$$H\hat{A}\Delta = H\hat{A}B + B\hat{A}\Gamma + \Gamma\hat{A}\Delta = 45° + 90° + 45° = 180°.$$

Επομένως τα σημεία $H,\ A$ $και$ Δ είναι συνευθειακά.



b) Έστω ότι η προέκταση του τμήματος $B\Theta$ τέμνει την πλευρά $E\Delta$ του τετραγώνου $A\Gamma\Delta E$ στο σημείο I.

Τα τρίγωνα $\overset{\Delta}{\Theta H B}$ $\kappa\alpha\iota$ $\overset{\Delta}{\Theta \Delta I}$ είναι ίσα, αφού: $\left\{\begin{matrix} H\Delta = \Theta\Delta \\ H\hat{\Theta}B = \Delta\hat{\Theta}I \\ \Theta\hat{H}B = \Theta\hat{\Delta}I = 45^\circ \end{matrix}\right\}$.

Επομένως θα είναι και: $\{\Theta B = \Theta I \quad (1) \quad \kappa\alpha\iota \quad HB = I\Delta = AB \quad (2)\}$.

Τα ορθογώνια τρίγωνα: $\overset{\Delta}{AB\Gamma}$ $\kappa\alpha\iota$ $\overset{\Delta}{\Gamma\Delta I}$ έχουν:

$$\{AB = \Delta I \quad \kappa\alpha\iota \quad A\Gamma = \Gamma\Delta\}.$$

Άρα είναι ίσα και συνεπώς: $B\Gamma = \Gamma I (3) \quad \kappa\alpha\iota \quad A\hat{\Gamma}B = \Delta\hat{\Gamma}I \quad (4)$.

Είναι επίσης: $B\hat{\Gamma}I = B\hat{\Gamma}A + A\hat{\Gamma}I \overset{(4)}{=} \Delta\hat{\Gamma}I + A\hat{\Gamma}I = A\hat{\Gamma}\Delta = 90^\circ \quad (5)$.

Από τις σχέσεις (3) και (5) συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Gamma I}$ είναι ορθογώνιο στο Γ και ισοσκελές.

Λόγω της (1) στο ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $\overset{\Delta}{B\Gamma I}$ η $\Gamma\Theta$ είναι διάμεσος, άρα και ύψος, που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του. Άρα, $\Gamma\Theta = \frac{BI}{2} \overset{(1)}{=} B\Theta \quad \kappa\alpha\iota \quad \Gamma\Theta \perp BI$.

Έτσι, το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Theta B\Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

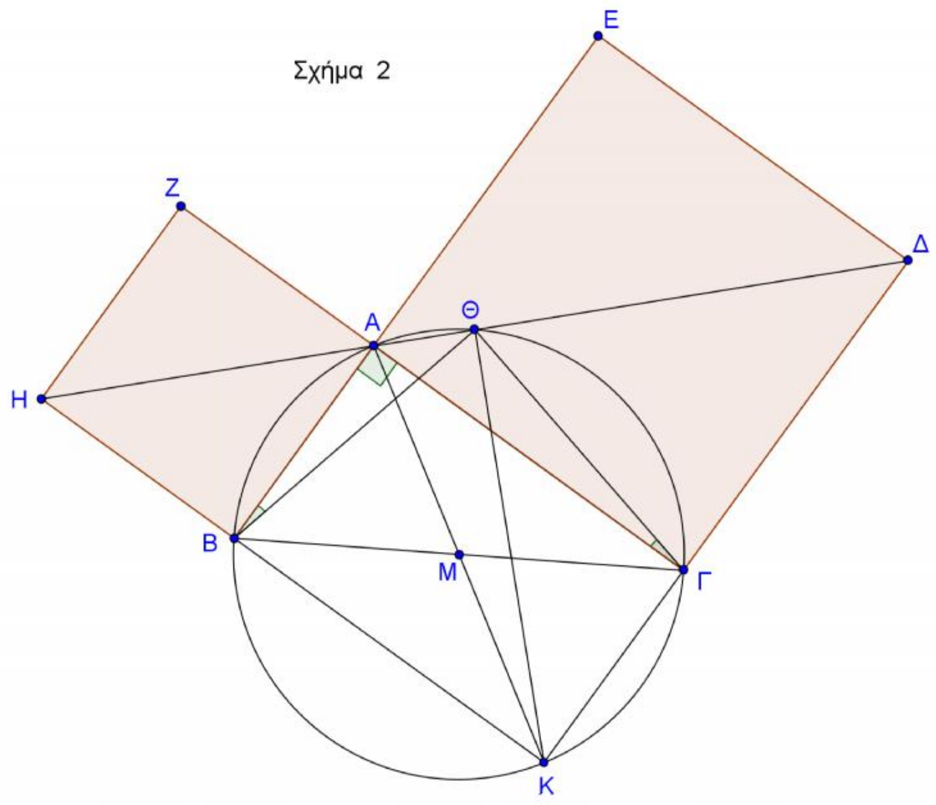
Το ερώτημα b) θα μπορούσε να αποδειχθεί και ως εξής:

Αν οι προεκτάσεις των HB $\kappa\alpha\iota$ $\Delta\Gamma$ τέμνονται στο σημείο K τότε το τρίγωνο $\overset{\Delta}{HK\Delta}$ θα είναι ορθογώνιο στο K και ισοσκελές με: $KH = K\Delta \quad (6)$.

Στο τρίγωνο αυτό το τμήμα $K\Theta$ είναι διάμεσος που αντιστοιχεί στην βάση του$H\Delta$. Επομένως $K\Theta \perp H\Delta$.

Το τετράπλευρο $BA\Theta K$ είναι εγγράφιμμο σε κύκλο, αφού:

$B\hat{A}\Gamma = A\hat{\Theta}K = 90°$. Προφανώς το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του $BA\Theta\Gamma$ είναι το μέσον M του $B\Gamma$, που είναι ταυτόχρονα μέσον και του AK «γιατί;».



Είναι: $AM = MK = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma = \frac{AK}{2} = \Theta M$ (7). Επομένως ο περιγεγραμμένος κύκλος του $BA\Theta K$ διέρχεται και από το σημείο Γ και είναι ο $(M, \quad MA)$.

Στον κύκλο αυτό η γωνία $B\hat{\Theta}\Gamma$ είναι εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Επομένως είναι: $B\hat{\Theta}\Gamma = 90°$, δηλαδή $\Theta B \perp \Theta\Gamma$ (8).

Είναι επίσης: $\Theta\hat{K}\Gamma = \Theta\hat{A}\Gamma = 45°$ και επομένως:

$\Theta\hat{K}B = 90° - \Theta\hat{K}\Gamma = 90° - 45° = 45° = \Theta\hat{K}\Gamma$ (9).

Τα τμήματα $\Theta B \ \kappa\alpha\iota \ \Theta\Gamma$ είναι χορδές του κύκλου $(M, \quad MA)$ και οι αντίστοιχες εγγεγραμμένες γωνίες τους είναι λόγω της (9) ίσες.

Άρα $\Theta B = \Theta \Gamma$ (10). Από τις (9) και (10) προκύπτει ότι το τρίγωνο $\overset{\Delta}{\Theta B \Gamma}$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.