

Αρχιμήδης Μεγάλοι 1995-1996

1. Έστω μια ακολουθία θετικών αριθμών για την οποία:

i) $\frac{a_{v+2}}{a_v} = \frac{1}{4}$ για κάθε v φυσικό διαφορετικό του 0.

ii) $\frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_{v+1}}{a_v} = 1$ για κάθε $|n - v| \neq 1$

Να αποδείξετε:

α) ότι η a_n αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.

β) ότι υπάρχει $t > 0$, ώστε $\sqrt{a_{v+1}} \leq \frac{1}{2} a_v + t$

2. Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρνουμε τα ύψη $A\Delta$, BE , ΓZ που τέμνονται στο H .

Έστω ακόμα $A\Gamma$ και $A\Theta$ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας A .

Αν M , N είναι τα μέσα των $B\Gamma$ και AH να αποδείξετε ότι:

α) Η MN είναι κάθετη στην EZ .

β) Αν η MN τέμνει τις $A\Gamma$, $A\Theta$ στα K , Λ τότε $K\Lambda = AH$.

3. Δίνονται 81 φυσικοί αριθμοί των οποίων των οποίων οι πρώτοι διαιρέτες ανήκουν στο σύνολο $\{2, 3, 5\}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 4 αριθμοί, από τους 81, που το γινόμενο τους είναι τέταρτη δύναμη φυσικού αριθμού.

4. Να ορίσετε το πλήθος των συναρτήσεων f , με $f: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1995, 1996\}$ οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη: ο αριθμός $f(1) + f(2) + \dots + f(n)$ είναι περιττός.