Αρχιμήδης Μεγάλοι 1995-1996

1. Έστω μια ακολουθία θετικών αριθμών για την οποία:

i) $\frac{\alpha_{\nu+2}}{\alpha_\nu}=\frac{1}{4}$ για κάθε ν φυσικό διαφορετικό του 0.

ii) $\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}+\frac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=1$ για κάθε $|n - \nu|\neq 1$

Να αποδείξετε:

α) ότι η α_ν αποτελεί γεωμετρική πρόοδο.

β) ότι υπάρχει t>0, ώστε $\sqrt{\alpha_{\nu+1}}\leq\frac{1}{2}\alpha_\nu+t$

2. Σε ένα οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ που τέμνονται στο Η. Έστω ακόμα ΑΙ και ΑΘ η εσωτερική και η εξωτερική διχοτόμος της γωνίας Α.

Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΒΓ και ΑΗ να αποδείξετε ότι:

α) Η ΜΝ είναι κάθετη στην ΕΖ.

β) Αν η ΜΝ τέμνει τις ΑΙ, ΑΘ στα Κ, Λ τότε ΚΛ = ΑΗ.

3. Δίνονται 81 φυσικοί αριθμοί των οποίων των οποίων οι πρώτοι διαιρέτες ανήκουν στο σύνολο {2, 3, 5}.

Να αποδείξετε ότι υπάρχουν 4 αριθμοί, από τους 81, που το γινόμενό τους είναι τέταρτη δύναμη φυσικού αριθμού.

4. Να ορίσετε το πλήθος των συναρτήσεων f, με f: {1, 2, ..., ν} → {1995, 1996} οι οποίες ικανοποιούν τη συνθήκη: ο αριθμός f(1) + f(2) + ... + f(ν) είναι περιττός.