

## Αρχιμήδης Μικροί 1995-1996

1. Να λύσετε την εξίσωση:

$$(x^2+2x+1)^2+(x^2+3x+2)^2+(x^2+4x+3)^2+\dots+(x^2+1996x+1995)^2=0$$

2. Σε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  τα σημεία  $\Delta, E, Z, H, \Theta$  είναι τα μέσα των  $B\Gamma, A\Delta, B\Delta, E\Delta$  και  $EZ$  αντιστοίχα. Αν  $I$  είναι η τομή των  $BE, A\Gamma$  και  $K$  η τομή των  $H\Theta, A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

α)  $AK=3\Gamma K$

β)  $HK=3H\Theta$

γ)  $BE=3EI$

δ)  $(E\Theta H)=\frac{1}{32}(AB\Gamma)$  (Το εμβαδόν του τριγώνου  $E\Theta H$  είναι το ένα τριακοστό δεύτερο του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ )

3. Να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή της παράστασης:  $2x^4-2x^2y^2+y^4-8x^2+18$ .

4. α) Αν το κλάσμα  $\frac{\alpha \cdot \nu + \beta}{\gamma \cdot \nu + \delta}$  απλοποιείται με το 2, να δείξετε ότι ο αριθμός  $\alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma$  είναι άρτιος. (Τα  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu$  είναι φυσικοί αριθμοί και ο  $\gamma \nu + \delta$  διαφορετικός από το μηδέν.)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει πρώτος αριθμός  $p$  και φυσικός αριθμός  $n$  ώστε να ισχύει  $n^2+n+p=1996$ .