Αρχιμήδης Μεγάλοι 1996-1997

1. Έστω P σημείο στο εσωτερικό ή στις πλευρές ενός τετραγώνου ΑΒΓΔ. Να προσδιοριστεί, για τις διάφορες θέσεις του P, το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης:

$$f(P) = A\hat{B}P + B\hat{\Gamma}P + \Gamma\hat{\Delta}P + \Delta\hat{A}P.$$

2. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

α) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,\infty)$

β) $f(x) > -\frac{1}{x}$, για κάθε $x>0$

γ) $f(x) f\left[f(x) + \frac{1}{x}\right] = 1$ για κάθε $x>0$.

Να υπολογίσετε το f(1).

3. Να βρεθούν όλες οι ακέραιες λύσεις της εξίσωσης:

$$\frac{13}{x^2} + \frac{1996}{y^2} = \frac{z}{1997}$$

4. Έστω p πολυώνυμο με ακέραιους συντελεστές το οποίο έχει 13, διαφορετικές μεταξύ τους ακέραιες ρίζες. Να αποδείξετε ότι αν n ακέραιος αριθμός με $p(n) \neq 0$, τότε $|p(n)| \geq 7(6!)^2$.

Επίσης να δοθεί παράδειγμα πολυωνύμου με ακέραιους συντελεστές και με 13, διαφορετικές μεταξύ τους ακέραιες ρίζες τέτοιο ώστε: για κάποιο $n \in Z$ να είναι $|p(n)| = 7(6!)^2$.