Αρχιμήδης Μικροί 1996-1997

1. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο Δ. Οι μεσοκάθετοι των ΒΔ και ΓΔ τέμνουν τη ΒΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα.

α) Να δειχτεί ότι ΒΕ=ΕΖ=ΖΓ.

β) Να βρεθεί τι μέρος του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΓ είναι το εμβαδό του τριγώνου ΒΔΕ.

2. Να βρεθούν όλοι οι φυσικοί αριθμοί ν ώστε η $A=\nu^4 + 4\nu^3 + 5\nu^2 + 6\nu$ να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

3. Να εξετάσετε αν μπορούμε να ξαναγράψουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 σε μια σειρά ώστε:

α) Το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών στη νέα σειρά να μην υπερβαίνει το 16.

β) Το άθροισμα οποιωνδήποτε τριών διαδοχικών αριθμών στη νέα σειρά να μην υπερβαίνει το 15.

4. Δίνονται 10 ομόκεντροι κύκλοι και 10 ακτίνες τους.

Στα σημεία που οι ακτίνες τέμνουν τον εσωτερικό κύκλο γράφουμε διαδοχικά και με τη φορά των δεικτών του ρολογιού τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Στον επόμενο κύκλο γράφουμε με την ίδια διαδικασία τους αριθμούς 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20. Συνεχίζουμε μέχρι το δέκατο κύκλο που γράφουμε τους αριθμούς 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98, 99, 100. Με τη διάταξη αυτή οι αριθμοί 1, 11, 21, 31, 41, 51, 61, 71, 81, 91 βρίσκονται στην ίδια ακτίνα και ομοίως και για τις άλλες ακτίνες.

Σε 50 από τους 100 αριθμούς που διαθέτουμε βάζουμε το πρόσημο "πλην" φροντίζοντας ώστε:

α) σε κάθε ακτίνα να υπάρχουν ακριβώς 5 "πλην" και

β) σε κάθε έναν από τους κύκλους να υπάρχουν ακριβώς 5 "πλην".

Να δειχτεί ότι το άθροισμα των 100 αριθμών που προκύπτουν είναι μηδέν.