Αρχιμήδης Μεγάλοι 1997-1998

1. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν άπειρες αριθμητικές πρόοδοι με ν-1 όρους (ν≥4), διαφορετικούς φυσικούς αριθμούς, των οποίων το γινόμενο είναι νιοστή δύναμη ενός φυσικού αριθμού.

2. Θεωρούμε κανονικό ν-γωνο και τα διαφορετικά κατά μέγεθος τμήματα, που συνδέουν δύο κορυφές του. Αν Μ το σύνολο των τμημάτων αυτών, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των τετραγώνων των στοιχείων του Μ είναι μεγαλύτερο από το διπλάσιο εμβαδόν του ν-γώνου.

3. Αν α, β, γ $\in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι: $\frac{(\beta+\gamma-\alpha)^2}{(\beta+\gamma)^2+\alpha^2}+\frac{(\gamma+\alpha-\beta)^2}{(\gamma+\alpha)^2+\beta^2}+\frac{(\alpha+\beta-\gamma)^2}{(\alpha+\beta)^2+\gamma^2}\geq\frac{3}{5}$.

4. Θεωρούμε ακολουθία $g(\nu)$ (όπου ν = 0, 1, 2, ...), η οποία ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$g(0)=0$$
$$g(\nu)=\nu-g(g(\nu-1)),\ \text{όπου}\ \nu=1,2,3,\ldots$$

Να αποδείξετε ότι:

(α) $g(k)\geq g(k-1)$, για κάθε φυσικό $k>0$.

(β) Δεν υπάρχουν φυσικοί k τέτοιοι ώστε $g(k-1)=g(k)=g(k+1)$.