Αρχιμήδης Μικροί 1997-1998

1. Να προσδιορίσετε τους ακέραιους θετικούς αριθμούς x , y , z , t , w για τους οποίους ισχύει:

$$x+\cfrac{1}{y+\cfrac{1}{z+\cfrac{1}{t+\cfrac{1}{w}}}}=\frac{1998}{115}$$

2. Αν α_1 , α_2 , ... , α_ν θετικοί, να αποδείξετε ότι :

$$\frac{\left(1+3\alpha_1+\alpha_1^2\right)\left(1+3\alpha_2+\alpha_2^2\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+3\alpha_\nu+\alpha_\nu^2\right)}{\alpha_1\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu}\geq 2^{2\nu}$$

3. Έστω ν πρώτος με $\nu\neq 2$ και $\nu\neq 5$. Να αποδείξετε ότι μεταξύ των ν πρώτων όρων της ακολουθίας

$$1,\ 11,\ 111,\ \ldots,\ \underbrace{11\ldots1}_{\nu\ \mu o\nu \acute{\alpha} \delta \varepsilon \varsigma}$$

υπάρχει ένας που διαιρείται με τον ν.

4. Θεωρούμε κύκλο (Ο,ρ) και ευθεία (ε) που εφάπτεται στον (Ο,ρ) στο σημείο Α. Μία ευθεία παράλληλη στην ΟΑ τέμνει τον (Ο,ρ) στα σημεία Β , Γ και την (ε) στο Δ (το Γ βρίσκεται ανάμεσα στα Β, Δ) και Ε το αντιδιαμετρικό του Γ ως προς το Ο. Φέρνουμε την ΕΑ που τέμνει την ΒΔ στο Ζ.

α) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο ΓΕΖ είναι ισοσκελές.

β) Να αποδείξετε ότι 2ΑΔ=ΕΒ.

γ) Να αποδείξετε ότι ΑΒ=ΚΟ , όπου Κ το μέσον της ΓΖ.

δ) Αν είναι ρ=2,5 και (ΑΔ)=1,5 να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΕΒΖ.