

Αρχιμήδης Μεγάλοι 1998-1999

1. Έστω  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $c \geq 0$ ,  $a+b+c > 0$ . Ν' αποδειχθεί ότι:

$$[f(xy)]^2 \leq f(x^2) f(y^2).$$

2. Πρόβλημα 10° του 5' κεφαλαίου των ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΩΝ του ΔΙΟΦΑΝΤΟΥ.

"Ευρίν τρίγωνον ορθογώνιον όπως ο εν τω εμβαδώ αυτού, προσλαβών το εν συναμφοτέρω της τε υποτεινούσης και μιας των ορθών, ποιή δοθέντα αριθμόν."

Δηλαδή: Να βρείτε ορθογώνιο τρίγωνο τέτοιο ώστε αν προστεθεί στην αριθμητική τιμή του εμβαδού του το μέτρο μιας καθέτου πλευράς του, βρίσκουμε δοσμένο αριθμό.

Οι αριθμοί εδώ είναι **ακέραιοι**. Να βρεθεί το τρίγωνο όταν ο δοσμένος αριθμός είναι 75.

3. Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , συμβολίζουμε με  $\Delta$ ,  $E$  και  $Z$  τα ίχνη των υψών του που άγονται από τις κορυφές  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα και με  $H$  το ορθόκεντρό του. Αν  $\Theta$  είναι το σημείο τομής της  $EZ$  με την ευθεία  $B\Gamma$ ,  $K$ ,  $\Lambda$  τα σημεία τομής των ευθειών  $AB$ ,  $A\Gamma$  με την παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $EZ$  και  $P$ ,  $\Pi$  τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων  $AH$ ,  $ZE$ , να δειχθεί ότι οι ευθείες  $P\Pi$ ,  $B\Gamma$  και ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου  $\Theta K\Lambda$  διέρχονται από το ίδιο σημείο.

4. Πάνω σε μια περιφέρεια κύκλου  $C$ , θεωρούμε  $n$  διαφορετικά σημεία ( $n \geq 3$ ), τα οποία αν ενωθούν ανά δύο μεταξύ τους, χωρίζουν τον κύκλο σε περιοχές (κομμάτια). Να προσδιορισθεί ο μέγιστος αριθμός περιοχών του κυκλικού δίσκου που ορίζονται με τον τρόπο αυτό.