Αρχιμήδης Μικροί 1998-1999

1. Να αποδειχθεί ότι εάν α και β είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $α^{2000} + β^{2000} = α^{1998} + β^{1998}$, τότε θα ισχύει $α^2 + β^2 \leq 2$.

2. Έστω ν σταθερός θετικός ακέραιος αριθμός και έστω χ , ψ θετικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε $χψ = νχ + νψ$. Να βρεθεί η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή του χ συναρτήσει του ν.

3. Έστω ΑΒΓ ισόπλευρο τρίγωνο και σημεία Δ επί της πλευράς ΑΒ, Ε επί της ΑΓ, $Δ_1$ και $Ε_1$ επί της ΒΓ ώστε $ΔΒ+ΒΔ_1 = ΑΒ$ και $ΑΓ=ΓΕ+ΓΕ_1$. Να προσδιοριστεί η μικρότερη γωνία που σχηματίζουν οι ευθείες $ΔΕ_1$ και $ΕΔ_1$.

4. Ως εναλλακτικό άθροισμα ενός συνόλου $A= \{α_1, α_2, ..., α_κ\}$ πραγματικών αριθμών με $α_1 < α_2 < ... < α_κ$, ορίζουμε τον αριθμό $Σ_A = α_κ - α_{κ-1} + α_{κ-2} - ... + (-1)^{κ-1} \cdot α_1$

(π.χ. αν $A= \{1, 2, 5, 7\}$, τότε $Σ_A = 7-5+2-1=3$)

Θεωρούμε τα εναλλακτικά αθροίσματα όλων των υποσυνόλων του συνόλου $A= \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ τα οποία και αθροίζουμε. Ποιο είναι το τελευταίο ψηφίο του τελικού αθροίσματος;