Αρχιμήδης Μεγάλοι 1999-2000

1. Θεωρούμε ορθογώνιο ΑΒΓΔ με ΑΒ = α, ΑΔ = β. Ευθεία ε που περνά από το κέντρο Ο του ορθογωνίου τέμνει την πλευρά ΑΔ στο σημείο Ε, Έτσι ώστε $\frac{AE}{E\Delta}=\frac{1}{2}$.

Αν το Μ είναι τυχαίο σημείο της ευθείας ε στο εσωτερικό του ορθογωνίου, να βρεθεί η αναγκαία και ικανή συνθήκη μεταξύ των α και β, έτσι ώστε οι αποστάσεις του Μ από τις πλευρές ΑΔ, ΑΒ, ΔΓ, ΒΓ, με τη σειρά που δίνονται, να αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου.

2. Να προσδιορίσετε τον πρώτο αριθμό ρ, αν ο αριθμός $1 + \rho + \rho^2 + \rho^3 + \rho^4$ είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.

3. Να βρεθεί ο μέγιστος θετικός πραγματικός αριθμός κ, για τον οποίο ισχύει:

$$\frac{xy}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)\left(3x^2+y^2\right)}}\leq\frac{1}{\kappa}$$

για όλους τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς x, y.

4. Για τα υποσύνολα A_1, A_2, ... , A_{2000} του συνόλου Μ, ισχύει ότι $|A_i|>\frac{2}{3}|M|$, για κάθε i = 1, 2, ..., 2000, όπου με |Χ| συμβολίζουμε το πλήθος των στοιχείων του συνόλου Χ.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει στοιχείο α του Μ το οποίο ανήκει σε τουλάχιστον 1334 από τα υποσύνολα A_i.