Αρχιμήδης Μεγάλοι 2000-2001

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας R. Οι ΒΔ, ΓΕ είναι οι διχοτόμοι των γωνιών Β και Γ και η ΔΕ τέμνει το τόξο ΑΒ, που δεν περιέχει το Γ, στο σημείο Κ. Αν είναι $ΚΑ_1 \perp ΒΓ$, $ΚΒ_1 \perp ΑΓ$, $ΚΓ_1 \perp ΑΒ$ και το σημείο Δ απέχει από τις πλευρές ΒΑ και ΒΓ απόσταση ίση με x, ενώ το Ε απέχει από τις πλευρές ΓΑ, ΒΓ απόσταση ίση με y, τότε:

α) να εκφράσετε τα μήκη των τμημάτων $ΚΑ_1$, $ΚΒ_1$, $ΚΓ_1$ συναρτήσει των x, y και του λόγου $\lambda = \frac{Κ\Delta}{Ε\Delta}$.

β) να αποδείξετε ότι $\frac{1}{KB} = \frac{1}{KA} + \frac{1}{K\Gamma}$.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι α, β τέτοιοι ώστε το γινόμενο $(15\alpha + \beta)\cdot(\alpha + 15\beta)$ να είναι μια δύναμη με βάση το 3 και εκθέτη ακέραιο.

3. Έστω $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση τέτοια ώστε f(1) = 3 και

$$f(m+n) + f(m-n) - m + n - 1 = \frac{f(2m) + f(2n)}{2}$$

για όλους τους μη αρνητικούς ακέραιους m, n με m≥n.

Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης f.

4. Στον πίνακα είναι γραμμένοι όλοι οι αριθμοί από 1 ως 500.

Δυο μαθητές παίζουν το εξής παιχνίδι:

Με τη σειρά ο ένας μετά τον άλλο διαγράφουν από ένα αριθμό. Το παιχνίδι τελειώνει όταν στον πίνακα απομείνουν δυο αριθμοί. Νικητής είναι ο Β, αν το άθροισμα των αριθμών που απομένουν διαιρείται με το 3, διαφορετικά νικητής είναι ο Α.

Αν αρχίζει πρώτος ο Α, έχει ο μαθητής Β στρατηγική νίκης;