Αρχιμήδης Μεγάλοι 2001-2002

1. Για τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ με βγ ≠ 0 ισχύει ότι $\frac{1-\gamma^2}{\beta\gamma} \geq 0$.

Να αποδείξετε ότι $10(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \beta\gamma^3) \geq 2\alpha\beta + 5\alpha\gamma$.

2. Ένας φοιτητής του Ε. Μ. Πολυτεχνείου διάβαζε το περασμένο καλοκαίρι για τις επαναληπτικές εξετάσεις ενός μαθήματος επί 37 μέρες, σύμφωνα με τους εξής κανόνες:

α) Κάθε μέρα διάβαζε μια τουλάχιστον ώρα.

β) Κάθε μέρα διάβαζε ακέραιο αριθμό ωρών, χωρίς να ξεπερνάει τις 12 ώρες.

γ) Συνολικά έπρεπε να διαβάσει το πολύ 60 ώρες

Να αποδείξετε ότι υπήρξαν κάποιες διαδοχικές μέρες, κατά τη διάρκεια των οποίων διάβασε συνολικά 13 ώρες.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\Gamma} > 10^o$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma} + 10^o$. Θεωρούμε σημείο Ε της πλευράς ΑΒ, έτσι ώστε $A\hat{\Gamma}E = 10^o$, και σημείο Δ της πλευράς ΑΓ, έτσι ώστε $\Delta\hat{B}A = 15^o$. Έστω Ζ ≠ Α είναι σημείο τομής των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων ΑΒΔ και ΑΕΓ.

Να αποδείξετε ότι: $Z\hat{B}A > Z\hat{\Gamma}A$

4. α) Για τους μη μηδενικούς αριθμούς p, q, r, a ισχύει ότι $pq = ra^2$, όπου ο r είναι πρώτος και οι p, q είναι πρώτοι μεταξύ τους, δηλαδή (p,q) = 1.

Να αποδείξετε ότι ένας από τους αριθμούς p, q είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει πρώτος φυσικός αριθμός p, που είναι τέτοιος ώστε ο αριθμός $p(2^{p+1} - 1)$ να είναι τέλειο τετράγωνο φυσικού αριθμού.