Αρχιμήδης Μεγάλοι 2002-2003

1. Αν a, b, c, d είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί και

$$a^3 + b^3 + 3ab = c + d = 1$$

να αποδείξετε ότι

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^3 + \left(b+\frac{1}{b}\right)^3 + \left(c+\frac{1}{c}\right)^3 + \left(d+\frac{1}{d}\right)^3 \geq 40$$

2. Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα

$$x^2 + y^2 - z(x + y) = 2$$

$$y^2 + z^2 - x(y + z) = 4$$

$$z^2 + x^2 - y(z + x) = 8$$

3. Δίνεται κύκλος C κέντρου Κ και ακτίνας r, σημείο A πάνω στον κύκλο και σημείο Ρ στο εξωτερικό του κύκλου C. Από το σημείο Ρ θεωρούμε μεταβλητή ευθεία ε η οποία τέμνει τον κύκλο C στα Β και Γ. Αν Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Τ του επιπέδου του κύκλου C τέτοιο ώστε το άθροισμα

$$HA^2 + HT^2$$

να είναι σταθερό (ανεξάρτητο από τη θέση της ευθείας ε).

4. Στο σύνολο Σ των σημείων του επιπέδου Π ορίζουμε μια πράξη *, δηλαδή μια απεικόνιση της μορφής

$$* : \Sigma \times \Sigma \to \Sigma$$

η οποία απεικονίζει κάθε διατεταγμένο ζεύγος σημείων (Χ , Υ) στο σημείο

$$X * Y = Z,$$

που είναι το συμμετρικό του Χ ως προς κέντρο συμμετρίας το Υ.

Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ στο επίπεδο Π. Είναι δυνατόν με διαδοχικές εφαρμογές της πράξης * στο σύνολο των τριών κορυφών {Α, Β, Γ} να λάβουμε την τέταρτη κορυφή Δ;