Αρχιμήδης Μεγάλοι 2003-2004

1. Να βρεθεί η μεγαλύτερη δυνατή τιμή του θετικού πραγματικού αριθμού M για την οποία αληθεύει η ανισότητα

$$x^4 + y^4 + z^4 + xyz(x + y + z) \geq M(xy + yz + zx)^2$$

για κάθε x, y, z $\in \mathbb{R}$.

2. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν θετικοί ακέραιοι αριθμοί x_1, x_2, ..., x_m, όπου $m \geq 2$, τέτοιοι ώστε

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_m \text{ και } \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} + \ldots + \frac{1}{x_m^3} = 1 .$$

3. Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Α εκτός αυτού. Από το σημείο Α φέρουμε ευθεία ε, διαφορετική της ευθείας ΑΟ, που τέμνει τον κύκλο στα σημεία Β και Γ, με το Β μεταξύ των Α και Γ. Στη συνέχεια φέρουμε τη συμμετρική ευθεία της ε, ως προς άξονα συμμετρίας την ευθεία ΑΟ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Ε και Δ, με το Ε μεταξύ των Α και Δ.

Να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι του τετραπλεύρου ΒΓΔΕ διέρχονται από σταθερό σημείο, δηλαδή τέμνονται στο ίδιο πάντοτε σημείο ανεξάρτητα από τη θέση της ευθείας ε.

4. Έστω Μ ένα υποσύνολο του συνόλου των φυσικών αριθμών με 2004 στοιχεία. Αν γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχει στοιχείο του Μ το οποίο να ισούται με το άθροισμα δυο άλλων στοιχείων του Μ, να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή την οποία μπορεί να πάρει το μεγαλύτερο από τα στοιχεία του Μ.