

Αρχιμήδης Μικροί 2004-2005

1. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$, $AB=a$, $\Gamma\Delta=2a$ και $\Delta B \perp B\Gamma$. Έστω M το μέσον της $\Gamma\Delta$, O το σημείο τομής των διαγωνίων του τετραπλεύρου $ABM\Delta$, K το σημείο τομής των ευθειών ΔA , ΓB και Λ το σημείο τομής των ευθειών KO και AB . Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $ABM\Delta$ είναι ρόμβος

β) το τρίγωνο $\Gamma\Delta K$ είναι ισοσκελές

γ) η ευθεία $\Delta\Lambda$ τέμνει το ευθύγραμμο τμήμα KB στο μέσον του.

2. Να βρεθούν ακέραιοι α , β , γ , δ , ώστε $\alpha\beta + \gamma\delta = 34$ και $\alpha\delta - \beta\gamma = 19$

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(v) = \frac{2v+1+\sqrt{v(v+1)}}{\sqrt{v+1}+\sqrt{v}}$, όπου ο v είναι θετικός ακέραιος.

α) να αποδείξετε ότι: $f(1) = 2\sqrt{2} - 1$

β) Να υπολογίσετε την τιμή του αθροίσματος $\Sigma = f(1) + f(2) + \dots + f(100)$.

4. Δίνεται κύκλος C κέντρου O και ακτίνας R καθώς και σημείο A εκτός αυτού με $AO = d$. Να προσδιορίσετε σημεία B , Γ και Δ πάνω στο κύκλο C έτσι ώστε να σχηματίζεται κυρτό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.