

Αρχιμήδης Μεγάλοι 2005-2006

1. Πόσοι διαφορετικοί πενταψήφιοι θετικοί ακέραιοι αριθμοί υπάρχουν, που το καθένα από τα ψηφία τους, εκτός του τελευταίου, είναι μεγαλύτερο ή ίσο του επόμενου ψηφίου τους;

2. Έστω n ένας θετικός ακέραιος αριθμός. Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση

$$x + y + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3n$$

δεν έχει λύσεις στο σύνολο των θετικών ρητών αριθμών.

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Λ, M, N των πλευρών $B\Gamma, AB$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα, έτσι ώστε η $A\Lambda$ να είναι διχοτόμος της γωνίας A και οι BN και ΓM να διέρχονται από ένα κοινό σημείο Σ της $A\Lambda$. Αν η γωνία $A\Lambda B$ ισούται με τη γωνία ANM , να αποδείξετε ότι η γωνία MNL είναι ορθή.

4. Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ικανοποιεί τις συνθήκες

α) $f(x + y + z) \leq 3(xy + yz + zx)$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς x, y, z και

β) υπάρχει φυσικός αριθμός n και συνάρτηση g τέτοια ώστε

$$g(g(x)) = x^{2n+1} \text{ και } f(g(x)) = (g(x))^2$$

για κάθε πραγματικό αριθμό x .