Αρχιμήδης Μεγάλοι 2007-2008

1. Έστω x, y $\in$(0, 1) μεταβλητοί πραγματικοί αριθμοί και θεωρούμε τους αριθμούς a = x + ym και b = y + xm όπου a, b, m θετικοί ακέραιοι. Αν όλα τα ζεύγη ακεραίων που προκύπτουν καθώς τα x, y μεταβάλλονται είναι 119, να βρεθεί ο m.

2. Να λυθεί στους ακεραίους η εξίσωση $x^8+2^{2^x+2}=p$, όπου p είναι πρώτος αριθμός.

3. Έστω H το ορθόκεντρο τριγώνου ΑΒΓ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο με κέντρο Κ και ακτίνα R=1. Αν Σ είναι η τομή των ευθειών που ορίζουν τα τμήματα ΗΚ και ΒΓ και επιπλέον ισχύει ΚΣ·ΚΗ = 1, να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου ΑΒΗΓΑ.

4. Αν a_1, a_2, ..., a_n είναι θετικοί ακέραιοι και k, t είναι ο ελάχιστος και ο μέγιστος από αυτούς αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι

$$\left(\frac{\alpha_1{}^2+\alpha_2{}^2+\ldots+\alpha_n{}^2}{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}\right)^{\frac{t\cdot n}{k}}\geq \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_n\,.$$