

1 Να προσδιορίσετε τις τιμές του θετικού ακέραιου n για τις οποίες ο αριθμός

$$A = \sqrt{\frac{9n-1}{n+7}}$$

είναι ρητός.

2. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με περίκεντρο O και A_1, B_1, Γ_1 τα μέσα των πλευρών $B\Gamma, A\Gamma$ και AB αντίστοιχα. Θεωρούμε τα σημεία A_2, B_2, Γ_2 έτσι ώστε: $\overline{OA_2} = \lambda \cdot \overline{OA_1}$, $\overline{OB_2} = \lambda \cdot \overline{OB_1}$ και $\overline{O\Gamma_2} = \lambda \cdot \overline{O\Gamma_1}$ με $\lambda > 0$. Αποδείξτε ότι οι ευθείες $AA_2, BB_2, \Gamma\Gamma_2$ συντρέχουν.

3. Αν οι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν άθροισμα 2, να αποδείξετε ότι:

$$x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz \leq 1.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

4. Δίνονται οι διαφορετικοί μεταξύ τους μιγαδικοί αριθμοί $z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6$ των οποίων οι εικόνες $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ είναι διαδοχικά σημεία του κύκλου με κέντρο το σημείο $O(0,0)$ και ακτίνα $r > 0$. Αν w είναι μία λύση της εξίσωσης $z^2 + z + 1 = 0$ και ισχύουν οι σχέσεις:

$$z_1w^2 + z_3w + z_5 = 0 \quad (\text{I})$$

$$z_2w^2 + z_4w + z_6 = 0 \quad (\text{II})$$

να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $A_1A_3A_5$ είναι ισόπλευρο

β) $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_4| + |z_4 - z_5| + |z_5 - z_6| + |z_6 - z_1| = 3|z_1 - z_4| = 3|z_2 - z_5| = 3|z_3 - z_6|$.