Αρχιμήδης Μεγάλοι 2009-2010

1. Να προσδιορίσετε τις ακέραιες λύσεις της εξίσωσης

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y.$$

2. Αν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x και y έχουν άθροισμα 2α, όπου α > 0, να αποδείξετε ότι:

$$x^3 y^3 \left(x^2 + y^2\right)^2 \leq 4\alpha^{10}.$$

Για ποιες τιμές των x και y αληθεύει η ισότητα;

3. Δίνεται τρίγωνο ABC εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω I το έκκεντρό του. Οι προεκτάσεις των AI, BI και CI τέμνουν το περιγεγραμμένο κύκλο στα σημεία D, E και F αντίστοιχα. Οι κύκλοι με διάμετρο ID, IE και IF τέμνουν τις πλευρές BC, AC και AB στα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2 και C_1, C_2 αντίστοιχα.

Να αποδείξτε ότι τα σημεία A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 είναι ομοκυκλικά.

4. Στο επίπεδο θεωρούμε k + n διαφορετικές μεταξύ τους ευθείες, όπου k ακέραιος με k >1 και n θετικός ακέραιος, οι οποίες ανά τρεις δεν περνάνε από το ίδιο σημείο. Από τις ευθείες αυτές, k είναι παράλληλες μεταξύ τους ενώ οι υπόλοιπες n τέμνονται ανά δύο και δεν υπάρχει κάποια από αυτές που να είναι παράλληλη με τις k παράλληλες ευθείες. Όλες οι παραπάνω ευθείες τεμνόμενες διαμερίζουν το επίπεδο σε χωρία (π.χ τριγωνικά, πολυγωνικά και μη φραγμένα).

Δύο χωρία θεωρούνται διαφορετικά, αν δεν έχουν κοινά σημεία ή αν έχουν κοινά σημεία μόνο στο σύνορό τους. Ένα χωρίο θα το ονομάζουμε "καλό" όταν βρίσκεται ανάμεσα στις παράλληλες ευθείες.

Αν σε ένα σχηματισμό, το ελάχιστο πλήθος των "καλών" χωρίων είναι 176 και το μέγιστο πλήθος τους είναι 221, να βρεθούν τα k, n.