

Αρχιμήδης Μικροί 2009-2010

1. Να προσδιορίσετε το πλήθος των θετικών ακέραιων που δεν είναι δυνατόν να γραφούν στη μορφή $80κ + 3λ$, όπου $κ, λ \in \mathbf{N} = \{0,1, 2, \dots\}$.

2. Δίνεται ορθογώνιο $ΑΒΓΔ$ με πλευρές $ΑΒ = α$ και $ΒΓ = β$. Έστω $Ο$ το σημείο τομής των διαγωνίων του. Προεκτείνουμε την πλευρά $ΒΑ$ προς το μέρος του $Α$ κατά τμήμα $ΑΕ = ΑΟ$ και την διαγώνιο $ΔΒ$ προς το μέρος του $Β$ κατά τμήμα $ΒΖ = ΒΟ$.

Αν το τρίγωνο $ΕΖΓ$ είναι ισόπλευρο, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $β = α\sqrt{3}$

β) $ΑΖ = ΕΟ$

γ) $ΕΟ \perp ΖΔ$.

3. Αν a, b είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί με άθροισμα 3 και οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί x, y και z έχουν γινόμενο 1, να αποδείξετε ότι:

$$(ax + b)(ay + b)(az + b) \geq 27.$$

Για ποιες τιμές των x, y και z αληθεύει η ισότητα;

4. Δίνονται τρεις παράλληλες ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 ενός επιπέδου έτσι ώστε η ευθεία ϵ_2 να έχει την ίδια απόσταση a από τις ϵ_1 και ϵ_3 . Τοποθετούμε 5 σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 πάνω στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 , έτσι ώστε σε κάθε ευθεία να υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο. Να προσδιορίσετε το μέγιστο αριθμό ισοσκελών τριγώνων που είναι δυνατό να σχηματιστούν με κορυφές τρία από τα σημεία M_1, M_2, M_3, M_4 και M_5 με κατάλληλη τοποθέτησή τους πάνω στις ευθείες ϵ_1, ϵ_2 και ϵ_3 , σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(α) $M_1, M_2, M_3 \in \epsilon_2, M_4 \in \epsilon_1$ και $M_5 \in \epsilon_3$.

(β) $M_1, M_2 \in \epsilon_1, M_3, M_4 \in \epsilon_3$ και $M_5 \in \epsilon_2$.