Αρχιμήδης Μεγάλοι 2011-2012

1. Δυο θετικοί ακέραιοι p, q που είναι πρώτοι μεταξύ τους, ικανοποιούν τη σχέση

$$p+q^2=\left(n^2+1\right)p^2+q\ ,$$

όπου n θετικός ακέραιος, παράμετρος. Να βρείτε τα ζεύγη (p,q).

2. Να προσδιορίσετε όλα τα μη μηδενικά πολυώνυμα P(x), Q(x) με πραγματικούς συντελεστές του ελάχιστου δυνατού βαθμού ώστε:

$$P(x^2)+Q(x)=P(x)+x^5\,Q(x)\,,x\in\mathbb{R}$$

3. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ < ΒΓ, εγγεγραμμένο στον κύκλο C(O,R) και η διχοτόμος ΑΔ τέμνει τον κύκλο (C) στο σημείο Κ. Ο κύκλος (C_1) έχει κέντρο O_1 πάνω στην ΟΑ, διέρχεται από τα σημεία Α, Δ και τέμνει την ΑΒ στο Ε και την ΑΓ στο Ζ. Αν Μ,Ν είναι τα μέσα των ΖΓ, ΒΕ αντίστοιχα, να δείξετε ότι:

α) οι ευθείες ΖΕ, ΔΜ, ΚΓ συντρέχουν σε κάποιο σημείο Τ

β) οι ευθείες ΖΕ, ΔΝ, ΚΒ συντρέχουν σε κάποιο σημείο Σ

γ) η ΟΚ είναι μεσοκάθετος της ΤΣ.

4. Το ισοσκελές τραπέζιο του σχήματος αποτελείται από ίσα μεταξύ τους ισόπλευρα τρίγωνα που οι πλευρές τους έχουν μήκος 1. Η πλευρά A_1E έχει μήκος 3 και η μεγάλη βάση του, A_1A_ν, έχει μήκος ν-1. Ξεκινάμε από το σημείο A_1 και κινούμαστε κατά μήκος των ευθυγράμμων τμημάτων που ορίζονται μόνο προς τα δεξιά και επάνω (λοξά αριστερά ή δεξιά). Υπολογίστε (συναρτήσει του ν ή ανεξάρτητα από αυτό) το πλήθος όλων των δυνατών διαδρομών που μπορούμε να ακολουθήσουμε, με σκοπό να καταλήξουμε στα σημεία Β, Γ, Δ, Ε, όπου ν ακέραιος μεγαλύτερος του 3.