ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
30η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
23 Φεβρουαρίου 2013
Θέματα μεγάλων τάξεων

.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται η ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_n), $n = 1,2,3,...$ με

$$a_1 = 2 \text{ και } a_n = \left(\frac{n+1}{n-1}\right)\left(a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}\right),\ n \geq 2.$$

Να προσδιορίσετε τον όρο a_{2013}.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Στο σύνολο των ακεραίων να λύσετε την εξίσωση: $y = 2x^2 + 5xy + 3y^2$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνονται τα σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{160}$ τέτοια ώστε $|\mathrm{A}_i| = i,\ i = 1,2,...,160$. Με τα στοιχεία των συνόλων αυτών κατασκευάζουμε καινούρια σύνολα $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2, ..., \mathrm{M}_n$ με την ακόλουθη διαδικασία: Στο πρώτο βήμα επιλέγουμε κάποια από τα σύνολα $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{160}$ και αφαιρούμε από καθένα από αυτά τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Όλα τα στοιχεία που αφαιρούμε αποτελούν τα στοιχεία του συνόλου M_1. Στο δεύτερο βήμα επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία στα σύνολα που έχουν προκύψει μετά την εφαρμογή του πρώτου βήματος και έτσι ορίζουμε το σύνολο M_2. Συνεχίζουμε ομοίως μέχρι που να εξαντληθούν όλα τα στοιχεία των συνόλων $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_{160}$ ορίζοντας έτσι τα σύνολα $\mathrm{M}_3, ..., \mathrm{M}_n$. Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του αριθμού n.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνεται τρίγωνο $\mathrm{AB\Gamma}$ εγγεγραμμένο σε κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ (με κέντρο το σημείο O και ακτίνα R) και έστω Δ τυχόν σημείο της πλευράς $\mathrm{B\Gamma}$ (διαφορετικό από το μέσο της $\mathrm{B\Gamma}$). Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{BO\Delta}$, έστω c_1, τέμνει τον κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στο σημείο K και την AB στο σημείο Z. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου $\mathrm{\Gamma O\Delta}$, έστω c_2, τέμνει τον κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στο σημείο M και την $\mathrm{A\Gamma}$ στο σημείο E. Τέλος, ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου AEZ, έστω c_3, τέμνει τον κύκλο $\mathrm{c(O,R)}$ στο σημείο N. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $\mathrm{AB\Gamma}$ και KMN είναι ίσα.

Διάρκεια εξέτασης 3 ώρες και 45 λεπτά.
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες ***Καλή επιτυχία***