



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
31^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
22 Φεβρουαρίου 2014

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1

Θεωρούμε τρίγωνο ABC και έστω M το μέσο της πλευράς BC . Εξωτερικά του τριγώνου θεωρούμε παραλληλόγραμμο $BCDE$, τέτοιο ώστε: $BE \perp AM$ και $BE = \frac{AM}{2}$. Να αποδειχθεί ότι η ευθεία EM περνάει από το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος AD .

Πρόβλημα 2

Έστω p πρώτος και m θετικός ακέραιος. Να προσδιορίσετε όλα τα ζευγάρια (p, m) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$p(p+m) + p = (m+1)^3.$$

Πρόβλημα 3

Να λύσετε στους πραγματικούς αριθμούς το σύστημα:

$$x^3 = \frac{z}{y} - \frac{2y}{z}, \quad y^3 = \frac{x}{z} - \frac{2z}{x}, \quad z^3 = \frac{y}{x} - \frac{2x}{y}.$$

Πρόβλημα 4.

Βάφουμε τους αριθμούς 1, 2, 3, ..., 20 με δύο χρώματα άσπρο και μαύρο έτσι, ώστε να χρησιμοποιούνται και τα δύο χρώματα. Με πόσους τρόπους μπορεί να γίνει ο χρωματισμός ώστε το γινόμενο των άσπρων αριθμών και το γινόμενο των μαύρων αριθμών να έχουν μέγιστο κοινό διαιρέτη ίσο με 1;

*Διάρκεια διαγωνισμού: 3 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 5 μονάδες*

Καλή επιτυχία!