



ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
32^η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα
"Ο Αρχιμήδης"
28 Φεβρουαρίου 2015
Θέματα μικρών τάξεων

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ (εκτός από αυτές τις λύσεις κάθε άλλη τεκμηριωμένη λύση, είναι αποδεκτή)

Πρόβλημα 1

Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση

$$x^2 + (\alpha - 2)x - (\alpha - 1)(2\alpha - 3) = 0$$

έχει δύο ρίζες, τέτοιες ώστε η μία να ισούται με το τετράγωνο της άλλης.

Λύση

Έχουμε $\Delta = (\alpha - 2)^2 + 4(\alpha - 1)(2\alpha - 3) = 9\alpha^2 - 24\alpha + 16 = (3\alpha - 4)^2$, οπότε η εξίσωση έχει τις ρίζες

$$x_{1,2} = \frac{2 - \alpha \pm (3\alpha - 4)}{2} \Leftrightarrow x_1 = \alpha - 1, x_2 = -2\alpha + 3.$$

Επομένως ζητάμε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει:

$$x_1 = x_2^2 \text{ ή } x_2 = x_1^2 \Leftrightarrow \alpha - 1 = (-2\alpha + 3)^2 \text{ ή } -2\alpha + 3 = (\alpha - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \alpha - 1 = 4\alpha^2 - 12\alpha + 9 \text{ ή } -2\alpha + 3 = \alpha^2 - 2\alpha + 1$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha^2 - 13\alpha + 10 = 0 \text{ ή } \alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 2 \text{ ή } \alpha = \frac{5}{4} \text{ ή } \alpha = \sqrt{2} \text{ ή } \alpha = -\sqrt{2}.$$

Πρόβλημα 2

Να προσδιορίσετε όλα τα ζεύγη μη αρνητικών ακέραιων (m, n) με $m \geq n$, που είναι τέτοια ώστε ο αριθμός $A = (m + n)^3$ να διαιρεί τον αριθμό $B = 2n(3m^2 + n^2) + 8$.

Λύση

Έστω $A = (m + n)^3, B = 2n(3m^2 + n^2) + 8$. Επειδή $(m + n)^3 \mid 2n(3m^2 + n^2) + 8$ πρέπει να είναι:

$$(m + n)^3 \leq 2n(3m^2 + n^2) + 8 \Leftrightarrow m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3 \leq 6m^2n + 2n^3 + 8$$

$$\Leftrightarrow m^3 - 3m^2n + 3mn^2 - n^3 \leq 8 \Leftrightarrow (m - n)^3 \leq 8 \stackrel{m \geq n}{\Leftrightarrow} m - n \leq 2 \Leftrightarrow m - n \in \{0, 1, 2\}.$$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- $m - n = 0 \Leftrightarrow m = n$. Τότε $A = 8m^3, B = 8m^3 + 8$, οπότε

$$A \mid B \Leftrightarrow 8m^3 \mid 8m^3 + 8 \Leftrightarrow 8m^3 \mid 8 \Leftrightarrow m = 1, \text{ αφού } m > 0 \Rightarrow (m, n) = (1, 1).$$

- $m - n = 1$. Τότε έχουμε

$$A = (2n+1)^3, B = 2n(3(n+1)^2 + n^2) + 8 = 8n^3 + 12n^2 + 6n + 8 = (2n+1)^3 + 7.$$

Επομένως, $A|B \Leftrightarrow (2n+1)^3 | 7 \Rightarrow 2n+1=1 \Leftrightarrow n=0, m=1$ και $(m,n)=(1,0)$.

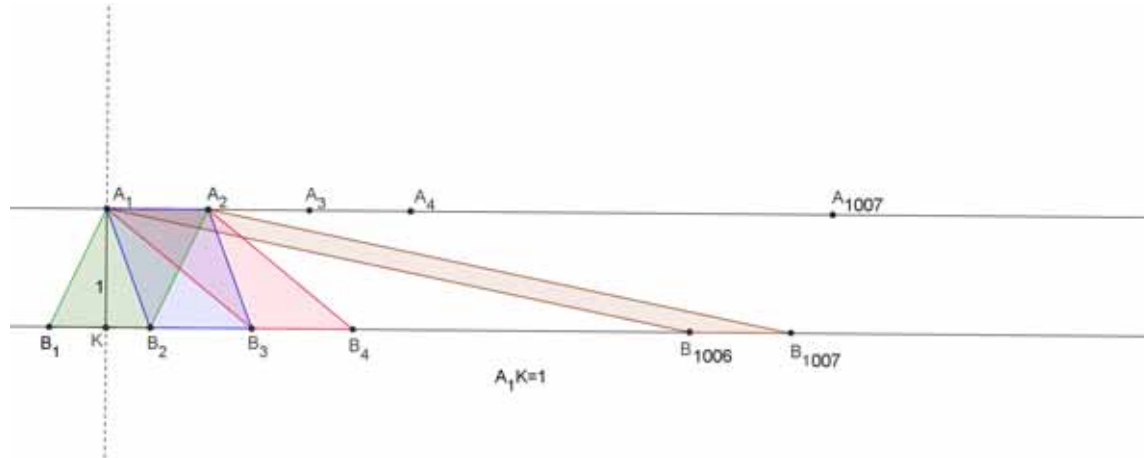
- $m-n=2$. Τότε $A=8(n+1)^3=B$, οπότε έχουμε άπειρα ζεύγη λύσεων της μορφής $(k+2,k)$, με $k \geq 0$.

Πρόβλημα 3.

Είναι δυνατόν να τοποθετήσουμε κατάλληλα στο επίπεδο 2014 σημεία, έτσι ώστε με κορυφές από αυτά τα σημεία να κατασκευάσουμε 1006^2 παραλληλόγραμμα εμβαδού 1;

Λύση

Θα αποδείξουμε ότι είναι δυνατόν. Παίρνουμε δύο παράλληλες ευθείες $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ που να έχουν απόσταση 1. Τοποθετούμε σε κάθε μία από αυτές από 1007 σημεία ώστε τα οποία να απέχουν μεταξύ τους απόσταση 1. Τότε στην ε_1 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα και στην ε_2 έχουμε 1006 μοναδιαία τμήματα. Οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_1 με οποιοδήποτε μοναδιαίο τμήμα της ε_2 δημιουργούν ένα παραλληλόγραμμα εμβαδού 1. Επομένως, συνολικά τα παραλληλόγραμμα εμβαδού 1 είναι: $1006 \cdot 1006 = 1006^2$.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4

Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB \leq A\Gamma$ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του $c(O,R)$. Η κάθετη από την κορυφή A προς την εφαπτομένη του κύκλου στο σημείο Γ την τέμνει στο σημείο Δ .

(α) Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι $\Gamma\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$.

(β) Αν ισχύει ότι $\Gamma\Delta = \frac{B\Gamma}{2}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές.

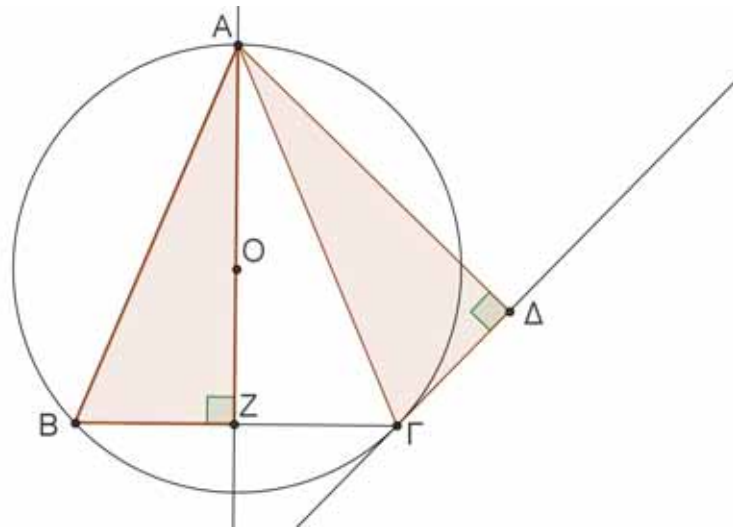
Λύση

(α) Αν Z είναι το μέσο της πλευράς $B\Gamma$, τότε η AZ είναι ύψος και διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $AB\Gamma$, οπότε τα ορθογώνια τρίγωνα $A\Gamma Z$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα, γιατί έχουν:

- $A\Gamma$ κοινή πλευρά (υποτείνουσα)

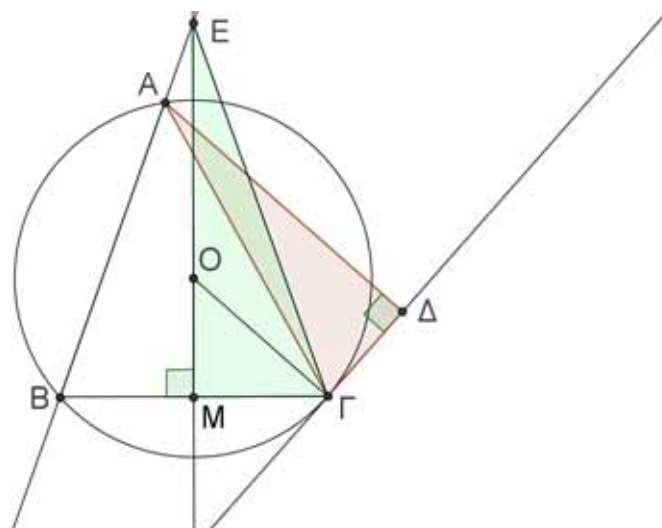
- $\hat{A}\Gamma\Delta = \hat{A}\Gamma Z$, αφού $\hat{A}\Gamma\Delta = \hat{A}\hat{B}\Gamma$ (γωνία χορδής – εφαπτομένης και αντίστοιχη εγγεγραμμένη) και $\hat{A}\hat{B}\Gamma = \hat{A}\hat{\Gamma}Z$, αφού $AB = A\Gamma$.

Επομένως θα είναι και $\Gamma\Delta = \Gamma Z = \frac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 2

(β) Ας υποθέσουμε ότι $AB < A\Gamma$. Θεωρούμε τη μεσοκάθετο στο μέσο M της BΓ που τέμνει την προέκταση της AB στο E. Τότε $\hat{A}\hat{B}\Gamma = \hat{A}\hat{\Gamma}\Delta$ (γωνία υπό χορδής και εφαπτομένης), και επιπλέον από την εκφώνηση έχουμε ότι $2\hat{\Gamma}\Delta = B\Gamma = 2BM$, οπότε $\hat{\Gamma}\Delta = BM$. Επομένως, τα ορθογώνια τρίγωνα EBM και AΓΔ είναι ίσα, οπότε θα είναι $A\Gamma = EB$. Όμως $EB = E\Gamma$, οπότε $A\Gamma = E\Gamma$. Αυτό όμως είναι άτοπο αφού η γωνία $\hat{E}\hat{A}\Gamma = 180^\circ - \hat{A}$ είναι αμβλεία, οπότε το τρίγωνο EΑΓ θα είχε δύο αμβλείες γωνίες. Επομένως, θα είναι $AB = A\Gamma$ και το τρίγωνο ABΓ ισοσκελές.



Σχήμα 3