ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ
Πανεπιστημίου (Ελευθερίου Βενιζέλου) 34
106 79 ΑΘΗΝΑ
Τηλ. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

GREEK MATHEMATICAL SOCIETY
34, Panepistimiou (Eleftheriou Venizelou) Street
GR. 106 79 - Athens - HELLAS
Tel. 3616532 - 3617784 - Fax: 3641025
e-mail : info@hms.gr,
www.hms.gr

ΕΠΙΤΡΟΠΗ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΩΝ
33η Ελληνική Μαθηματική Ολυμπιάδα "Ο Αρχιμήδης"
27 Φεβρουαρίου 2016

Θέματα μικρών τάξεων

Πρόβλημα 1
Οι θετικοί ακέραιοι p, q και r είναι πρώτοι και έχουν γινόμενο ίσο με n. Αν αυξήσουμε καθέναν από τους $p,\ q$ κατά 1, τότε το γινόμενο $(p+1)(q+1)r$ είναι ίσο με $n+138$. Να προσδιορίσετε όλες τις δυνατές τιμές του n.

Λύση
Σύμφωνα με την υπόθεση, έχουμε:

$$\left\{\begin{matrix} pqr=n \\ (p+1)(q+1)r=n+138 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} pqr=n \\ pqr+(p+q)r+r=n+138 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{matrix} pqr=n \\ (p+q+1)r=138 \end{matrix}\right\}.$$

Από την εξίσωση

$$(p+q+1)r=138=2\cdot 3\cdot 23 \qquad (1)$$

θα προσδιορίσουμε τις δυνατές τιμές των p, q, r και στη συνέχεια από την εξίσωση $pqr=n$ θα βρούμε τις δυνατές τιμές του n.

Επειδή οι θετικοί ακέραιοι p, q, r είναι πρώτοι, οι δυνατές τιμές του r είναι 2 ή 3 ή 23, οπότε έχουμε τις περιπτώσεις:

- Αν $r=2$, τότε $p+q+1=69 \Leftrightarrow p+q=68$, από την οποία, αφού p, q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:
$$(p,q)=(7,61),\ (p,q)=(61,7),\ (p,q)=(31,37),(p,q)=(37,31).$$
Επομένως για το αρχικό γινόμενο προκύπτουν οι τιμές:
$$n=7\cdot 61\cdot 2=\mathbf{854} \quad ή \quad n=31\cdot 37\cdot 2=\mathbf{2294}.$$
- Αν $r=3$, τότε προκύπτει η εξίσωση $p+q+1=46 \Leftrightarrow p+q=45$, από την οποία, αφού p, q πρώτοι, προκύπτουν τα ζεύγη:
$$(p,q)=(2,43),\ (p,q)=(43,2) \text{ και η τιμή } n=2\cdot 43\cdot 3=\mathbf{258}.$$
- Αν $r=23$, τότε $p+q+1=6 \Leftrightarrow p+q=5 \Leftrightarrow (p,q)=(2,3)$ ή $(p,q)=(3,2)$, οπότε θα είναι $n=2\cdot 3\cdot 23=\mathbf{138}$.

Επομένως οι δυνατές τιμές του n είναι οι: **138, 258, 854** και **2294**.

Πρόβλημα 2
Οι πραγματικοί αριθμοί x, y, z, με $x \neq z$, είναι διαφορετικοί από το 0 και ικανοποιούν τις ισότητες

$$\left(x+y\right)^2+\left(2-xy\right)=9,$$
$$\left(y+z\right)^2-\left(3+yz\right)=4.$$

Να προσδιορίσετε την τιμή της παράστασης:

$$\mathrm{A}=\left(\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}\right)\left(\frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}\right)\left(\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}\right).$$

Λύση

Οι δεδομένες σχέσεις γίνονται:

$$x^2+y^2+xy=7, \qquad (1)$$
$$y^2+z^2+yz=7, \qquad (2)$$

από τις οποίες με αφαίρεση κατά μέλη προκύπτει:

$$x^2-z^2+xy-yz=0 \Leftrightarrow \left(x-z\right)\left(x+z\right)+y\left(x-z\right)=0 \Leftrightarrow \left(x-z\right)\left(x+z+y\right)=0.$$

Από την τελευταία ισότητα, επειδή είναι από την υπόθεση $x-z\neq 0$, έπεται ότι:

$$x+y+z=0\,. \qquad (3)$$

Θεωρούμε τώρα καθέναν χωριστά τους παράγοντες της παράστασης A. Έχουμε

$$\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}+\frac{z^3}{x^2y}=\frac{x^3+y^3+z^3}{x^2y},\ \frac{y}{z}+\frac{z^2}{y^2}+\frac{x^3}{y^2z}=\frac{x^3+y^3+z^3}{y^2z},$$

$$\frac{z}{x}+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^3}{z^2x}=\frac{x^3+y^3+z^3}{z^2x},\ \text{οπότε η παράσταση γίνεται:}$$

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{\left(xyz\right)^3}. \qquad (4)$$

Από τη σχέση (3) λαμβάνουμε: $z=-x-y$, οπότε

$$x^3+y^3+z^3=x^3+y^3+\left(-x-y\right)^3=x^3+y^3-\left(x+y\right)^3$$
$$=-3xy\left(x+y\right)=-3xy\left(-z\right)=3xyz. \qquad (5)$$

Η σχέση (5) προκύπτει άμεσα και από την ταυτότητα του Euler.

Επομένως, από τη σχέση (4) λαμβάνουμε

$$\mathrm{A}=\frac{\left(x^3+y^3+z^3\right)^3}{\left(xyz\right)^3}=\frac{\left(3xyz\right)^3}{\left(xyz\right)^3}=27.$$

Πρόβλημα 3

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ // ΒΓ) με $\hat{\mathrm{A}}=\hat{\mathrm{B}}=90^\circ$ και ΑΔ < ΒΓ. Ονομάζουμε Ε το σημείο τομής των μη παράλληλων πλευρών ΑΒ και ΓΔ, Ζ το συμμετρικό του Α ως προς την ευθεία ΒΓ και Μ το μέσον της ΕΖ. Αν δίνεται ότι η ευθεία ΓΜ είναι κάθετη στην ευθεία ΔΖ, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΖΓ είναι κάθετη στην ευθεία ΕΓ.

Λύση

Έστω ότι η ΔΖ τέμνει τις ΓΜ, ΒΓ στα Κ, Ν αντίστοιχα. Τότε στο τρίγωνο ΑΔΖ, έχουμε ότι Β μέσον του ΑΖ και ΒΝ // ΑΔ, οπότε έχουμε ότι Ν μέσον του ΖΔ.

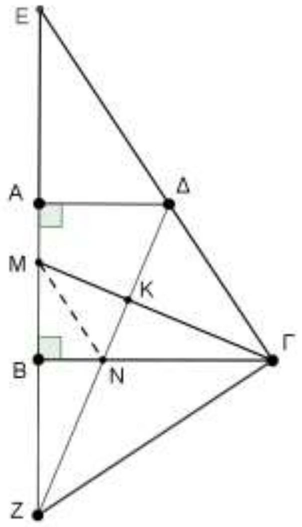
Επομένως στο τρίγωνο ΖΕΔ η ΜΝ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών, οπότε:

$$\mathrm{MN} \parallel \mathrm{E}\Delta \qquad (1)$$

Επιπλέον στο τρίγωνο ΜΓΖ, τα ΓΒ, ΖΚ είναι ύψη, άρα το σημείο Ν είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, οπότε:

$$MN \perp Z\Gamma \qquad (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έπεται ότι $Z\Gamma \perp E\Gamma$, που είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 1

Πρόβλημα 4.

Να υπολογίσετε το πλήθος των διατεταγμένων εξάδων $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6)$ που μπορούν να δημιουργηθούν, αν οι αριθμοί $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ μπορούν να πάρουν τις τιμές 0,1 και 2 και το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ είναι άρτιος.

Λύση

Το άθροισμα $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6$ είναι άρτιος, αν και μόνο αν το πλήθος των 1 είναι άρτιο, δηλαδή 0,2, 4,6.

Αν δεν έχουμε καθόλου 1, οι δυνατές επιλογές είναι 2^6, αφού για καθέναν από τους a_i έχουμε δύο επιλογές (0 ή 2)

Αν έχουμε δύο 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{2}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 4 θέσεις έχουμε 2^4 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^4 \cdot \binom{6}{2}$ δυνατές εξάδες.

Αν έχουμε τέσσερα 1, τότε τη θέση τους μπορούμε να την επιλέξουμε με $\binom{6}{4}$ τρόπους και στις υπόλοιπες 2 θέσεις έχουμε 2^2 επιλογές. Δηλαδή συνολικά έχουμε $2^2 \cdot \binom{6}{4}$ δυνατές εξάδες. Αν έχουμε έξι 1, τότε είναι φανερό ότι έχουμε έναν τρόπο.

Επομένως, συνολικά έχουμε: $2^6 + 2^4 \cdot \binom{6}{2} + 2^2 \cdot \binom{6}{4} + 1 = 64 + 16 \cdot 15 + 4 \cdot 15 + 1 = 365$ εξάδες.