

Ευκλείδης Α Λυκείου 1996-1997

1. Έστω οι αριθμοί α, β με $\alpha^2 - 4\alpha + \beta^2 + 10\beta + 20 = 0$.

Να δειχτεί ότι $\alpha > \beta$.

2. Έστω κύκλος διαμέτρου AB και σημείο Γ εξωτερικό του κύκλου. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Γ στρέφεται ώστε να μη διέρχεται από σημείο εσωτερικό του AB .

Έστω A', B' οι προβολές των A, B επί της (ε) . Να βρεθεί η θέση της (ε) για την οποία το άθροισμα $(AA') + (BB')$ γίνεται μέγιστο.

3. Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x^2 - 4x - 19^{96} - 96^{19} - 2000 = 0$ δεν έχει ακέραια λύση.

4. Έστω οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ τοποθετημένοι στις θέσεις:

| | |
|----------|----------|
| α | β |
| γ | δ |

Κάνουμε την παρακάτω κίνηση: Είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας γραμμής, είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας στήλης.

Να δειχτεί ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο

| | |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 0 | 0 |

αν και μόνο αν $\alpha + \delta = \beta + \gamma$.