Ευκλείδης Β' Λυκείου 1996-1997

1. Έστω οι αριθμοί α, β, γ, δ τοποθετημένοι στις θέσεις:

α	β
γ	δ

Κάνουμε την παρακάτω κίνηση: Είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας γραμμής, είτε προσθέτουμε έναν ακέραιο (θετικό ή αρνητικό) σε κάθε στοιχείο μιας στήλης.

Να δειχτεί ότι μπορούμε να καταλήξουμε στο

0	0
0	0

αν και μόνο αν $\alpha+\delta=\beta+\gamma$.

2. Να λυθεί στο σύνολο των ακεραίων το σύστημα $\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2=155 \\ x+y+z=21 \end{matrix}\right\}$.

3. Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R). Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει την προέκταση της ΑΒ στο Ε, η διχοτόμος της $A\hat{E}\Gamma$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η ΒΖ τέμνει τον κύκλο στο Κ και τη ΓΕ στο Λ.

Να δειχτεί ότι $\frac{KZ}{K\Lambda}=\frac{AZ}{A\Gamma}\cdot\frac{EB}{E\Lambda}$.

4. Έστω το σύνολο $A=\{\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_\nu\}$, $\alpha_i\geq 0$, $i=1,2,\dots,\nu$. Για κάθε i, j υπάρχει κ, $(1\leq i,j,\kappa\leq\nu)$ ώστε $\alpha_\kappa=\frac{1}{2}|\alpha_i-\alpha_j|$.

Να δειχτεί ότι $\alpha_i=0$ για όλα τα i.