

Ευκλείδης Α Λυκείου 1998-1999

1. Έστω $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{Q}^*$, με $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \alpha\beta\gamma$ (1).

Να δειχτεί ότι ο αριθμός $A = (\alpha^2\beta^2 + 1)(\beta^2\gamma^2 + 1)(\gamma^2\alpha^2 + 1)$ είναι τέλειο τετράγωνο ρητού αριθμού.

2. Έστω κύκλος $(O, 2)$ και τετράγωνο $OAB\Gamma$. Το τετράγωνο και ο κύκλος έχουν κοινό μέρος εμβαδού ίσο με τα $\frac{3}{5}$ του εμβαδού του τετραγώνου.

Να υπολογιστεί η πλευρά του τετραγώνου.

3. Να εξεταστεί αν υπάρχουν 4 διαφορετικοί φυσικοί αριθμοί ώστε το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε από αυτούς να είναι δύναμη του 5.

4. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E σημεία των $AB, A\Gamma$.

Να δειχτεί ότι τα τμήματα $\Delta E, BE, \Gamma\Delta$ αποτελούν πλευρές τριγώνου.