

Ευκλείδης Β' Λυκείου 1998-1999

1. Έστω η συνάρτηση  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(1)=1999$  και ισχύει  $f(1)+f(2)+\dots+f(v)=v^2f(v)$ ,  $v \in \mathbb{N}^*$ .

Να υπολογιστεί ο  $f(1999)$ .

2. Να βρεθούν όλοι οι ακέραιοι  $v$ , για τους οποίους η εξίσωση

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{v}{x+y}, \quad xy(x+y) \neq 0 \quad \text{έχει ακέραιες λύσεις.}$$

3. Για  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{P}$  ονομάζουμε άθροισμα Cesaro τον αριθμό  $C_n = \frac{s_1 + s_2 + \dots + s_n}{n}$ , όπου

$$s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k.$$

Το άθροισμα Cesaro των αριθμών  $a_1, a_2, \dots, a_{99}$  είναι 1000.

Να υπολογιστεί το άθροισμα Cesaro των αριθμών  $1, a_1, a_2, \dots, a_{99}$ .

4. Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $\Theta$  το βαρύκεντρο. Από το  $\Theta$  παίρνουμε ευθεία που τέμνει τις  $AB, A\Gamma$  στα  $K, \Lambda$  αντίστοιχα.

Να δειχτεί ότι  $\left(\frac{BK}{AK}\right)^4 + \left(\frac{\Gamma\Lambda}{A\Lambda}\right)^4 \geq \frac{1}{8}$ .