

Ευκλείδης Γ' Λυκείου 1999-2000

1. Έστω τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  εγγεγραμμένο σε κύκλο  $(O,R)$ . Σημείο  $M$  κινείται στο τόξο  $AB$ .

Να δειχτεί ότι ο λόγος  $\frac{MA+MB}{MG+MD}$  είναι σταθερός.

2. Έστω οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στα ύψη  $AD, BE$  παίρνουμε σημεία  $M, N$ , αντίστοιχα, τέτοια ώστε  $B\hat{M}\Gamma = A\hat{N}\Gamma = 90^\circ$ .

α) Να δειχτεί ότι το τρίγωνο  $\Gamma MN$  είναι ισοσκελές.

β) Επιπλέον ισχύουν:  $MN = 4 + 2\sqrt{3}$  και  $M\hat{\Gamma}N = 30^\circ$ .

Να υπολογιστεί το εμβαδόν του  $M\Gamma N$ .

3. Έστω  $\mathbf{N}^*$  το σύνολο των θετικών ακεραίων αριθμών.

Να δειχτεί ότι το  $\mathbf{N}^*$  μπορεί να γραφτεί ως ένωση τριών συνόλων  $A, B, \Gamma$ , ανά δύο ξένων μεταξύ τους, που είναι τέτοια ώστε, να ισχύει:

"αν  $\kappa, \lambda \in \mathbf{N}^*$  με  $|\kappa - \lambda| = 2$  ή  $5$ , τότε τα  $\kappa$  και  $\lambda$  ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα".

4. Έστω  $x, y, z \in \mathbf{R}$  και ισχύει  $x^2 + 2y^2 + z^2 = \frac{2}{5}a^2$ ,  $a > 0$ .

Να δειχτεί ότι  $|x - y + z| \leq a$ .