

1. Αν a και x πραγματικοί με $a \geq 1$, ναδειχτεί ότι $\frac{x^2+a}{\sqrt{x^2+a-1}} \geq 2$.

Πότε ισχύει η ισότητα;

2. Θεωρούμε 100 αριθμούς a_1, a_2, \dots, a_{100} από τους οποίους οι 40 είναι ίσοι με 1 και οι 60 με 2 και τους τοποθετούμε πάνω σε ένα κύκλο έτσι, ώστε να μην υπάρχουν τρεις ίσοι αριθμοί σε διαδοχικές θέσεις. Σχηματίζονται έτσι 100 τριάδες T_i , $i=1, 2, \dots, 100$, αριθμών σε διαδοχικές θέσεις πάνω στον κύκλο.

Έστω P_i είναι το γινόμενο και S_i είναι το άθροισμα των τριών αριθμών της τριάδας T_i , $i=1, 2, \dots, 100$.

Ναδειχτεί ότι:

1) $P_i = 2S_i - 6$, για κάθε $i=1, 2, \dots, 100$.

2) $P_1 + P_2 + P_3 + \dots + P_{100} = 360$.

3. α) Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $x^4 + 4y^4$.

β) Αν οι αριθμοί x, y είναι θετικοί ακέραιοι με $y \geq 2$, να αποδείξετε ότι ο αριθμός $x^4 + 4y^4$ είναι σύνθετος.

4. Θεωρούμε τις κάθετες ημιευθείες $O\tau, Os$, το σημείο A της $O\tau$ με $OA=x$ και το σημείο B της Os με $OB=y$ και $y < x$. Κατασκευάζουμε το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ μέσα στη γωνία \hat{tOs} . Από την κορυφή Δ φέρνουμε ευθεία ϵ κάθετη στη διχοτόμο $O\delta$ της γωνίας \hat{tOs} η οποία τέμνει την Os στο E και την $O\tau$ στο Z .

Ναδειχτεί ότι:

1) $AZ=x+y$ και $BE=2x$.

2) Το τρίγωνο $B\Gamma E$ είναι ισοσκελές.